CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 -

CLASA a XII-a
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL REAL – SPECIALIZAREA ȘTIINȚE ALE NATURII

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

a) Dacă F este o primitivă a lui f pe $\mathbb{R}$ și $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=F(x)-arctgx$, arătați că $G(-2)>G\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Calculați $\int(1+f(x))e^{arctgx}dx$.

Detalii rezolvare subiect 1		**Barem asociat**
a)	$G'(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}<0,\forall x<1$; $G'(x)<0,\forall x<1\Rightarrow G$ strict descrescătoare pe $(-\infty,1)$	**2p**
	$-2<\dfrac{1}{2}<1\Rightarrow G(-2)>G\left(\dfrac{1}{2}\right)$	**2p**
b)	$\int(1+f(x))e^{arctgx}dx=\int e^{arctgx}dx+\int x\dfrac{e^{arctgx}}{x^2+1}dx$	**1p**
	$\int x\dfrac{e^{arctgx}}{x^2+1}dx=\int x\left(e^{arctgx}\right)'dx=xe^{arctgx}-\int e^{arctgx}dx$. $\int(1+f(x))e^{arctgx}dx=xe^{arctgx}+\mathcal{C}$	**2p**

Enunț subiect 2

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}+...+\sqrt[2019]{x}, & x\le 1\\ \dfrac{a}{x}, & x>1\end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

a) Determinați $a\in\mathbb{R}$ pentru care *f* admite primitive de două ori derivabile.

b) Arătați $\int_{-p}^{p}f(x)dx\in\mathbb{N}$, oricare ar fi $p\in(0,1)$.

Detalii rezolvare subiect 2		**Barem asociat**
a)	Dacă *F* este o primitivă de două ori derivabilă în 1, atunci *f* este derivabilă în 1, deci *f* este continuă în 1.	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=\underbrace{1+1+...+1}_{1009\text{ termeni}}=1009=f(1)$, $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=a$.	**1p**
	$a=1009$; finalizare.	**1p**

b)	$f_k:[-p,p]\to\mathbb{R},\ f_k(x)=\sqrt[2k+1]{x}$ este impară, deci $\int_{-p}^{p}\sqrt[2k+1]{x}dx=0,\ \forall k\in\{1,2,...,1009\}$	**2p**
	$\int_{-p}^{p}f(x)dx=\sum_{k=1}^{2009}\int_{-p}^{p}\sqrt[2k+1]{x}dx=0\in\mathbb{N}$	**1p**

Enunț subiect 3

Fie $a\in(0;\infty)$, mulțimea $G=(-a,a)$ și aplicația „$\circ$" definită prin $x\circ y=\dfrac{a^2x+a^2y}{a^2+xy}$, pentru orice $x,y\in G$.

a) Arătați că „$\circ$" este lege de compoziție pe G.

b) Admitem că $(G,\circ)$ este grup. Arătați că funcția $f:G\to(0,\infty)$, $f(x)=\dfrac{a-x}{a+x}$ este un izomorfism între grupurile $(G,\circ)$ și $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
a) $a^2+xy>0$, $\forall x,y\in G$	**1p**
$a-x\circ y=\dfrac{a(x-a)(y-a)}{a^2+xy}>0$, $\forall x,y\in G$	**1p**
$a+x\circ y=\dfrac{a(x+a)(y+a)}{a^2+xy}>0$, $\forall x,y\in G$; finalizare.	**1p**
b) f este bijecție – justificare, oricare ar fi $a\in(0;\infty)$	**2p**
$f(x\circ y)=\dfrac{a^2+xy-ax-ay}{a^2+xy+ax+ay}=\dfrac{(a-x)(a-y)}{(a+x)(a+y)}=f(x)f(y),\ \forall x,y\in G$; finalizare.	**2p**

Enunț subiect 4

Fie p un număr natural, $p\geq5$ și funcția $f:\{pk\mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{Q}_+,\ f(x)=\sqrt[p]{11^x}$. Arătați că:

a) $(\{pk\mid k\in\mathbb{Z}\},+)$ și $(\mathbb{Q}_+,\cdot)$ sunt grupuri.

b) f este morfism de grupuri.

c) f nu este izomorfism de grupuri.

Detalii rezolvare subiect 3		**Barem asociat**
a)	Verificarea axiomelor grupului pentru $(\{pk\mid k\in\mathbb{Z}\},+)$, respectiv $(\mathbb{Q}_+,\cdot)$	**2p**
b)	Verificarea condiției de morfism	**2p**
c)	$f(pk)=11^k,\ \forall k\in\mathbb{Z}$ $\operatorname{Im} f\neq\mathbb{Q}_+\Rightarrow f$ nu este surjectivă; finalizare.	**3p**