CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019 -

CLASA a XI-a
FILIERA tehnologică - PROFIL servicii, resurse naturale și protecția mediului

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1:

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}-1, x\in(-\infty,0) \\ \dfrac{x^3+1}{x^2+1}, x\in[0,+\infty) \end{cases}$.

a) Determinați mulțimea $A=\left\{x_0\in\mathbb{R} \,\middle|\, \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right\}$.

b) Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctul $M\left(m-1, m^2+3m\right)$ aparține asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Pentru orice $x_0\in\mathbb{R}^*$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$	**1p**
$l_s(0)=-1\neq 1=l_d(0)$, deci $A=\mathbb{R}^*$.	**2p**
b) $y=x$ ecuația asimptotei oblice	**2p**
M aparține asimptotei $\Rightarrow m-1=m^2+3m\Rightarrow (m+1)^2=0\Rightarrow m=-1$	**2p**

Enunț subiect 2:

a) Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

b) Determinați $p\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $1^2\cdot\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}+2^2\cdot\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}+\ldots+p^2\cdot\lim\limits_{x\to p^2}\dfrac{\sqrt{x}-p}{x-p^2}=\dfrac{45}{2}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$	**1p**
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\dfrac{1}{4}$, $\lim\limits_{x\to p^2}\dfrac{\sqrt{x}-p}{x-p^2}=\dfrac{1}{2p}$	**2p**
$1^2\cdot\dfrac{1}{1\cdot 2}+2^2\cdot\dfrac{1}{2\cdot 2}+\ldots+p^2\cdot\dfrac{1}{2\cdot p}=\dfrac{p(p+1)}{4}\Rightarrow\dfrac{p(p+1)}{4}=\dfrac{45}{2}\Rightarrow p=9$	**2p**

Enunț subiect 3:

Fie matricea $A(x)=\begin{pmatrix}\cos x & \sin x\\ -\sin x & \cos x\end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{R}$.

a) Calculați: $A\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot A\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

b) Calculați: $A^{2020}\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $A\left(\frac{\pi}{12}\right)\cdot A\left(\frac{5\pi}{12}\right)=A\left(\frac{\pi}{2}\right)$	**2p**
$A\left(\frac{\pi}{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	**1p**
b) $A^{n}(x)=\begin{pmatrix}\cos nx & \sin nx\\ -\sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$	**2p**
Demonstrație prin metoda inducției matematice	**1p**
$A^{2020}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**1p**

Enunț subiect 4:

Într-un reper cartezian se consideră punctele distincte două câte două $A(x,2x-1)$, $B(2y,y-1)$ și $C(x+y,x-y)$. Determinați aria triunghiului *ABC*, știind că originea reperului cartezian aparține dreptei *AB*, iar punctul *C* se află pe axa Ox.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$O\in AB\Leftrightarrow O,A,B$ coliniare $\Leftrightarrow\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 2x-1 & 1\\ 2y & y-1 & 1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow 3xy+x-2y=0\ (1)$	**3p**
$C\in Ox\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y\ (2)$	**1p**
Din (1) și (2) $\Rightarrow 3x^2-x=0\Rightarrow x=0$ care nu convine sau $x=\frac{1}{3}$	**1p**
$A_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1\\ \frac{2}{3} & 0 & 1\end{vmatrix}$ și $A_{\triangle ABC}=\frac{1}{9}$.	**2p**