CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -

CLASA a IX-a
FILIERA teoretică - PROFIL uman

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

Arătaţi că, dacă două numere $x \in \mathbb{R}$ şi $y \in (0;1)$ îndeplinesc condiţia $([x]-1)^{2018}+\left(\{y\}-\frac{1}{2}\right)^{2018}=0$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x şi $\{y\}$ partea fracţionară a lui y, atunci valoarea maximă a expresiei $E(x,y)=20-18xy$ este 11.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
Din condiţia din ipoteză $\Rightarrow [x]-1=\{y\}-\frac{1}{2}=0$	**1p**
$[x]=1 \Rightarrow x\in[1;2)$	**1p**
$\{y\}=\frac{1}{2},\ y\in(0;1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}$	**1p**
$x\geq 1 /\cdot y=\frac{1}{2}\Rightarrow xy\geq\frac{1}{2} /\cdot(-18)\Rightarrow -18xy\leq -9 /+20\Rightarrow 20-18xy\leq 11$	**4p**

Enunţ subiect 2

Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| x+3>\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right\}$ şi $B=\{x\in\mathbb{Z} | -1\leq x<\sqrt{5}-1\}$.

a) (4p) Determinați mulțimile *A* și *B*.
b) (3p) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $A\bigcap B$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $\sqrt{6-2\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$	**1p**
$A=\left(\sqrt{5}-4;\propto\right)$	**1p**
$B=\{-1,0,1\}$	**2p**
b) $\sqrt{5}-4<-1\Rightarrow A\bigcap B=\{-1,0,1\}$	**2p**
$card\,(A\cap B)=3$	**1p**

Enunţ subiect 3

Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$.

a) (3p) Dacă $b_3-b_1=45$ și $b_5-b_3=720$, arătați că $b_7-b_5=11520$.

b) (2p) Reprezentând pe axa numerelor termenii progresiei date, constatăm că distanța dintre al treilea şi primul este mai mică decât distanţa dintre al cincilea și al treilea. Demonstrați că rația progresiei are modulul supraunitar.

c) (2p) Arătaţi că, oricare ar fi progresia geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$, tripletul de numere b_3-b_1, b_5-b_3 și b_7-b_5 reprezintă termeni coonsecutivi ai unei progresii geometrice.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $b_3-b_1=b_1(q^2-1)=45$, $b_5-b_3=b_1q^2(q^2-1)=720 \Rightarrow q^2=16$	**2p**
$b_7-b_5=q^4\cdot b_1(q^2-1)=16\cdot 720=11520$	**1p**
b) $b_3-b_1=b_1(q^2-1)$ și $b_5-b_3=b_1q^2(q^2-1) \Rightarrow \dfrac{b_5-b_3}{b_3-b_1}=q^2>1 \Rightarrow \lvert q\rvert>1$	**2p**
c) b_3-b_1, b_5-b_3, b_7-b_5 sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice dacă $(b_5-b_3)^2=(b_3-b_1)\cdot(b_7-b_5) \Leftrightarrow$	**1p**
$(b_5-b_3)^2=b_1^2q^4(q^2-1)^2=(b_3-b_1)\cdot(b_7-b_5)$	**1p**

Enunţ subiect 4

Se consideră un triunghi ABC și punctele $D\in AC$, astfel încât $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right)$ și $E\in AB$, astfel încât $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right)$, iar $\{K\}=BD\cap EC$

a) (4p) Arătați că vectorii $\overrightarrow{DE}$ și $\overrightarrow{BC}$ sunt coliniari;

b) (3p) Determinați $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{EK}=a\cdot\overrightarrow{CE}$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
a) $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow D$ este mijlocul segmentului $[AC]$	**1p**
$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} \Rightarrow E$ este mijlocul segmentului $[AB]$	**1p**
DE linie mijlocie în $\triangle ABC \Rightarrow$ $\overrightarrow{DE}$ coliniar cu $\overrightarrow{BC}$	**2p**
b) BD și CE mediane $\Rightarrow K$ este centrulde greutate al $\triangle ABC$	**1p**
$EK=\frac{1}{3}EC \Rightarrow$ $\overrightarrow{EK}=-\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{CE} \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$	**2p**