CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -

CLASA a X-a
FILIERA teoretică - PROFIL uman

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

a) (3p) Arătaţi că numărul $N=\log_3\frac{1}{2}+\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+...+\log_3\frac{242}{243}$ este întreg.

b) (2p) Dacă a şi b sunt numere reale strict pozitive şi diferite de 1, pentru care $\log_a b+\log_b a=2$, arătaţi că $a=b$.

c) (2p) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Aflaţi numerele reale $a,b\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ care îndeplinesc simultan condiţiile:
(1) $\log_a b^n+\log_b a^n=2n$ şi (2) $\log_n a^b+\log_n b^a=a+b$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $N=\log_3\frac{1}{243}$	**2p**
$N=\log_3\left(3^{-5}\right)=-5\in\mathbb{Z}$	**1p**
b) $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}\Rightarrow\log_a b+\frac{1}{\log_a b}=2\Rightarrow\left(\log_a b-1\right)^2=0$	**1p**
$\log_a b=1\Rightarrow a=b$	**1p**
c) $(1)\Rightarrow n\log_a b+n\log_b a=2n\Rightarrow\log_a b+\log_b a=2\overset{a)}{\Rightarrow}a=b$	**1p**
$(2)\Rightarrow 2\log_n a^a=2a\Rightarrow a\left(\log_n a-1\right)=0\Rightarrow a=n=b$	**1p**

Enunţ subiect 2

Se consideră numerele reale $x=(\sqrt{2}+1)^3$ şi $y=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$.

a) (2p) Arătaţi că $y=\sqrt{2}+1$.

b) (5p) Arătați că media geometrică a numerelor x și y aparține intervalului (5;6).

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) Calcul direct	**2p**
b) Calculul mediei geometrice $m_g=(\sqrt{2}+1)^2$	**2p**
$m_g=3+2\sqrt{2}=3+\sqrt{8}$	**1p**
$3+\sqrt{8}>5$	**1p**
$3+\sqrt{8}<6$	**1p**

Enunţ subiect 3

Se consideră numărul $a=4^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{81}}\cdot 16^5:\left(\frac{1}{4}\right)^{12}$. Arătați că numărul $\sqrt[3]{a}$ este un număr natural, pătrat perfect.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
$a=2^6$ $\sqrt[3]{a}=4$ $4\in\mathbb{N},\ 4=2^2$	**4p** **2p** **1p**

Enunţ subiect 4

O foaie dreptunghiulară cu grosimea de $\frac{1}{8}$ mm se pliază de-a lungul unei axe de simetrie. Noul dreptunghi se pliază de asemenea, de-a lungul unei axe de simtrie. Operația se repetă de un număr *n* de ori, $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2.$

a) Câte plieri sunt necesare pentru ca grosimea pachetului obținut să depășească 10 cm?

b) Dacă atunci când grosimea este 25,6 cm, aria dreptunghiului obținut este de 6 cm ^{2}, care este aria foii nepliate ?

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
a) Grosimea inițială este $h=\frac{1}{8}$ mm. Dacă $n=1$, prima pliere, grosimea $=h\cdot 2$; dacă *n*=2, a doua pliere, grosimea $=h\cdot 2^2$	**1p**
Pentru a *n*-a pliere, grosimea $=h\cdot 2^n$	**1p**
$\frac{1}{8}\text{mm}\cdot 2^n>100\text{ mm}$ $2^{n-3}>100$	**1p**
$2^6<100<2^7\Rightarrow n-3>6\Rightarrow n>9$, deci sunt necesare cel puțin 10 plieri	**1p**
b) Aria inițială este *A*. Dacă $n=1$, prima pliere, aria $=\frac{A}{2}$, dacă *n*=2, a doua pliere, aria $=\frac{A}{2^2}$. Pentru a *n*-a pliere, aria $=\frac{A}{2^n}$	**1p**
$h\cdot 2^n=256,\ h=2^{-3},\ 2^{n-3}=2^8$	**1p**
$n=11,\ \frac{A}{2^n}=6,\ \text{A}=12288\text{ cm}^2$	**1p**