CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -

CLASA a XI-a
FILIERA tehnologică - PROFIL tehnic – toate specializările profesionale;
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) (4p) Determinați numerele reale x și y, astfel încât $x\cdot A+(y+1)\cdot B=A\cdot B$.

b) (3p) Calculați $(A+B)^n$, pentru $n\in\mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $x\cdot A+(y+1)\cdot B=A\cdot B \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2x+y+1 & -x+y+1 & -x+y+1\\ -x+y+1 & 2x+y+1 & -x+y+1\\ -x+y+1 & -x+y+1 & 2x+y+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	2p
$\begin{cases}2x+y+1=0\\ -x+y+1=0\end{cases}\Rightarrow x=0, y=-1$	2p
b) $A+B=3I_3$	1p
$(A+B)^n=3^n I_3$	2p

Enunţ subiect 2

Se consideră determinantul $\Delta=\begin{vmatrix}x & 0 & -2\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & x-4\end{vmatrix}$ și punctele $A(0,x)$, $B(0,2x)$, $C(1+x,x^2-1)$ reprezentate într-un reper cartezian, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) (3p) Calculați determinantul Δ și determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care Δ are valoarea minimă.

b) (4p) Pentru $x=2$, determinați coordonatele punctului M din plan, astfel încât $A_{\triangle ACM}=A_{\triangle BCM}$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $\Delta=(x-2)^2$	1p
Δ minim se obține pentru $x-2=0\Rightarrow x=2$	2p

b) $A_{\triangle ACM}=\frac{1}{2}\lvert 3y-x-6\rvert$ și $A_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}\lvert 3y+x-12\rvert$, unde $M(x,y)$	2p
$\lvert 3y-x-6\rvert=\lvert 3y+x-12\rvert \Rightarrow 3y-x-6=\pm(\lvert 3y+x-12\rvert)\Rightarrow x=3, y\in\mathbb{R}$ sau $y=3, x\in\mathbb{R}$	2p

Enunț subiect 3

Se consideră funcția: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2+bx+1}{x-1}, x\in(-\infty,0]\\ \dfrac{\ln(1+x^2)}{2018x^2}, x\in(0,+\infty)\end{cases}$, cu $a,b\in\mathbb{R}$.

a) (4p) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția admite asimptota oblică de ecuație $y=2018x+1$ spre $-\infty$.

b) (3p) Arătați că $\lim_{x\nearrow 0} f(x)\neq \lim_{x\searrow 0} f(x)$, pentru orice $a,b\in\mathbb{R}$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
a) $2018=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^2+bx+1}{x^2-x}=a$	2p
$1=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2018x^2+bx+2}{x-1}-2018x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{(b+2018)x+2}{x-1}=b+2018\Rightarrow b=-2017$	2p
b) $\lim_{x\nearrow 0} f(x)=-1$	1p
$\lim_{x\searrow 0} f(x)=\frac{1}{2018}$	1p
$-1\neq\frac{1}{2018}$, pentru $\forall a,b\in\mathbb{R}$	1p

Enunț subiect 4

Se consideră limitele $L_k=\lim_{x\to k}\frac{x^2-k^2}{2x-2k}$, unde $k\in\mathbb{N}^*$. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\sum_{k=1}^{n} L_k=5050$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
$L_k=\lim_{x\to k}\frac{x^2-k^2}{2x-2k}=\lim_{x\to k}\frac{(x-k)(x+k)}{2(x-k)}=\lim_{x\to k}\frac{x+k}{2}=k$	3p
$\sum_{k=1}^{n} L_k=5050\Rightarrow\sum_{k=1}^{n} k=5050\Rightarrow\frac{n(n+1)}{2}=5050$	3p
$n=100$	1p