MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE
SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

CLASA a IX-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1
O progresie aritmetică are primul termen $a_1 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10$ și rația $r\in\mathbb{R}$.

a) Pentru $r=1$, determinați $n\in\mathbb{N}^*$ pentru care $a_n = 2a_1$.

b) Arătați că, dacă $r\in\{2,3,4,\ldots,10\}$, progresia nu are nici un termen număr natural prim.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $2a_1 = a_1 + n - 1$	**2p**
$n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10 + 1$ (=3628801)	**1p**
b) $r\in\{2,3,4,\ldots,10\}\Rightarrow r\,\|\,1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10$	**2p**
$r\,\|\,r(n-1)$	**1p**
$r\,\|\,1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 10 + r(n-1)\Rightarrow a_n$ se divide cu $r\geq 2$, deci nu e prim.	**1p**

Enunț subiect 2
Pentru fiecare număr natural nenul i și fiecare număr natural j notăm cu b_{ij} numărul natural format cu exact i cifre din mulțimea $\{3,4\}$, scrise în ordine crescătoare, din care exact j sunt cifre de 4. Notăm S_n suma tuturor numerelor b_{ij}, când i parcurge mulțimea $\{1,2,3,\ldots,n\}$, iar j ia toate valorile posibile.

a) Stabiliți câte numere se adună în S_n.

b) Calculați ultima cifră a lui S_{2018}.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Pentru fiecare i, numărul j parcurge mulțimea $\{0,1,2,\ldots,i\}$, deci sunt $i+1$ numere de forma b_{ij}.	**1p**
Numărul de termeni ai sumei S_n este $\sum_{i=1}^{n}(i+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$	**2p**
b) Mulțimea $\{b_{i0}, b_{i1}, b_{i2},\ldots,b_{ii}\}$ conține un element care se termină în 3 (b_{i0}), iar restul se termină în 4.	**1p**

$U.C.\left(S_{2018}\right)=U.C.\left(\sum_{i=1}^{2018}\left(3+\sum_{j=1}^{i}4\right)\right)=U.C.\left(\sum_{i=1}^{2018}(3+4i)\right)=$	**1p**
$=U.C.\left(3\cdot 2018+4\cdot\frac{2018\cdot 2019}{2}\right)=U.C.(4+4036\cdot 2019)=8$	**1p**

Enunț subiect 3

În trapezul isoscel $ABCD$, cu baza mare AB și $m(\sphericalangle A)=\frac{\pi}{3}$ se notează $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ și $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

a) Descompuneți după vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ vectorii $\overrightarrow{BC}$ și $\overrightarrow{DC}$.

b) Dacă $\left|\overrightarrow{AB}\right|=8$ și $\left|\overrightarrow{AD}\right|=3$, determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $DC=\left\|\vec{a}\right\|-\left\|\vec{b}\right\|$	**1p**
$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ coliniari $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=r\cdot\overrightarrow{DC}\Rightarrow r=\frac{\left\|\vec{a}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|-\left\|\vec{b}\right\|}$	**1p**
$\overrightarrow{DC}=\frac{1}{r}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{\left\|\vec{a}\right\|-\left\|\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}\cdot\vec{a}$	**1p**
$\overrightarrow{BC}=\vec{b}-\frac{\left\|\vec{b}\right\|}{\left\|\vec{a}\right\|}\cdot\vec{a}$	**1p**
b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$	**1p**
$\left\|\overrightarrow{DB}\right\|=7$	**2p**

Enunț subiect 4

a) Arătați că $\sqrt{x^2-6x+9}+\left|x+3\right|\geq 2018$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left|x\right|\geq 1009$.

b) Arătați că $\left[\sum_{k=1}^{2018}\frac{1}{k^2}\right]=1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\sqrt{x^2-6x+9}+\left\|x+3\right\|=\left\|x-3\right\|+\left\|x+3\right\|\geq\left\|x-3+x+3\right\|=2\left\|x\right\|$ și	**2p**
$2\left\|x\right\|\geq 2018$, deci $\sqrt{x^2-6x+9}+\left\|x+3\right\|\geq 2018$	**1p**
b) $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, oricare ar fi $k\geq 2$	**1p**
$\sum_{k=1}^{2018}\frac{1}{k^2}\leq 1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{2017}-\frac{1}{2018}\right)=2-\frac{1}{2018}$	**2p**
$1<\sum_{k=1}^{2018}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{2018}\Rightarrow\left[\sum_{k=1}^{2018}\frac{1}{k^2}\right]=1$	**1p**