CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Științe ale naturii
CLASA a XII-a
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Pe mulțimea $\mathbb{R}$, se definește legea de compoziție asociativă și comutativă $x*y=(x-a)(y-a)+a$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

a) (3p) Determinați $b\in\mathbb{R}$ astfel încât ecuația $x*x=b$ să nu aibă soluții reale.

b) (4p) Arătați că există o infinitate de numere $x,y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ astfel încât $x*y\in\mathbb{Z}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Ecuația este $(x-a)^2=b-a$	**2p**
Ecuația nu are soluții dacă și numai dacă $b-a<0$. Deci $b\in(-\infty;a)$	**1p**
b) Pentru $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0,1\}$, avem $\frac{k}{k+1}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ și $\frac{k+1}{k}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.	**2p**
Pentru $a\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0,1\}$, alegem $x=a+\frac{k}{k+1},y=a+\frac{k+1}{k}$	**1p**
Deci $x,y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ și $x*y=(a+\frac{k}{k+1}-a)(a+\frac{k+1}{k}-a)+a=1+a\in\mathbb{Z}$.	**1p**

Enunț subiect 2

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin(3xy+tgy)}{y^2+xy}, & x\le -1\\ \log_2\left(3^{mx}+\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{(z-1)^2-(z-2)(z+2)}{z^2+4z-(z+3)^2}\right), & x>-1\end{cases}$,

unde m,y și z sunt numere reale.

Determinați numărul real m, astfel încât funcția f să admită primitive pe $\mathbb{R}$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
$\dfrac{\sin(3xy+tgy)}{y^2+xy}=\dfrac{\sin(3xy+tgy)}{3xy+tgy}\cdot\left(\dfrac{3x}{y+x}+\dfrac{tgy}{y}\cdot\dfrac{1}{y+x}\right)$	**1p**
$\lim\limits_{y\to0}\dfrac{\sin(3xy+tgy)}{y^2+xy}=3+\dfrac{1}{x}$	**1p**
$\lim\limits_{z\to+\infty}\dfrac{(z-1)^2-(z-2)(z+2)}{z^2+4z-(z+3)^2}=1$	**1p**
f continuă $\Rightarrow f$ admite primitive	**1p**

f continuă în $x=-1 \Leftrightarrow l_s(-1)=l_d(-1)=f(-1) \Leftrightarrow 2=\log_2\left(3^{-m}+1\right)$	**1p**
Relația: $3^{-m}+1=4$	**1p**
$m=-1$	**1p**

Enunț subiect 3

Fie mulímea de matrice $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid x\in 2\mathbb{Z}+1\right\}$.

a) (3p) Arătați că, deși toate matricele din G au determinantul nul, totuși ele sunt inversabile în G în raport cu înmulțirea matricelor.

b) (4p) Admițând că $(G,\cdot)$ este un grup, arătați că acesta este izomorf cu grupul $(2\mathbb{Z},+)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Elementul neutru este $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$.	**1p**
$\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -x-2\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\in G$	**2p**
b) Se definește $f:G\to 2\mathbb{Z}+1$, cu $f\left(\begin{pmatrix}1 & 1 & x\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)=x+1$	**2p**
f bijectivă	**1p**
f morfism	**1p**

Enunț subiect 4

Fie funcția $f:(-\infty,\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{e^x+1}, & x\in(-\infty,0]\\ \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x, & x\in(0,\pi)\end{cases}$ care admite primitive. Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(-1)=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\int\frac{1}{e^x+1}dx=\int\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}dx=\int dx-\int\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx=x-\ln\left(e^x+1\right)+C$, $x\in(-\infty,0)$	**2p**
$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}\left(e^x\right)'dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x-$ $-\int\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'e^x dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x-\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx=\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x+C$, $x\in(0,\pi)$	**2p**
$F:(-\infty,\pi)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\begin{cases}x-\ln\left(e^x+1\right)+c, & x\in(-\infty,0]\\ \dfrac{\sin x}{1+\cos x}e^x-\ln 2+c, & x\in(0,\pi)\end{cases}$, $c\in\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a funcției.	**2p**
$F(-1)=0\Leftrightarrow c=\ln(1+e)$ și scrierea primitivei.	**1p**