CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

CLASA a XI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Se consideră $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}^*$, mulțimile $B=\{b_k, k=\overline{1,n}\} \subset \mathbb{R}, C=\{c_k, k=\overline{1,n}\} \subset \mathbb{R}$ și funcția $f:(1;n) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x)=ax^2+b_kx+c_k$ pentru orice x cu $[x]=k$.

a) (4p) Dacă f are limită în orice punct din domeniul de definiție și B are un singur element arătați că mulțimea C are tot un singur element.

b) (3p) Dacă f are limită în orice punct din domeniul de definiție și $c_1=c_n$ arătați că $b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}=(n-1)b_n-b_1$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Egalitatea limitelor laterale în $2,3,\ldots,n-1$ implică : $4a+2b_1+c_1=4a+2b_2+c_2$ $9a+3b_2+c_2=9a+3b_3+c_3$ $16a+4b_3+c_3=16a+4b_4+c_4$ $\ldots$ $(n-1)^2a+(n-1)b_{n-1}+c_{n-1}=(n-1)^2a+(n-1)b_n+c_n$	**2p**
Dacă B are un singur element, deducem $b_1=b_2=\ldots=b_n$ și atunci $c_1=c_2=\ldots=c_n$, deci C are un singur element.	**2p**
b) Adunând relațiile $2b_1+c_1=2b_2+c_2$ $3b_2+c_2=3b_3+c_3$ $4b_3+c_3=4b_4+c_4$ $\ldots$ $(n-1)b_{n-1}+c_{n-1}=(n-1)b_n+c_n$ obținem $c_1+2b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}=(n-1)b_n+c_n$	**2p**
În condițiile date avem $2b_1+b_2+b_3+\ldots+b_{n-1}=(n-1)b_n$, de unde se obține relația cerută.	**1p**

Enunț subiect 2

Fie determinantul $D(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2016+x & 2017+x & 2018+x & 2019+x \\ 2016^2+x^2 & 2017^2+x^2 & 2018^2+x^2 & 2019^2+x^2 \\ 2016^3+x^3 & 2017^3+x^3 & 2018^3+x^3 & 2019^3+x^3 \end{vmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) (3p) Arătați că $D(0)=12$.

b) (4p) Pentru $x\in\{2016,2017,2018,2019\}$, calculați $D(x)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $D(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2016 & 2017 & 2018 & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=$ $(2019-2016)(2019-2017)(2019-2018)(2018-2016)\cdot$ $(2018-2017)(2017-2016)=12$	**3p**
b) $D(x)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2016+x & 2017+x & 2018+x & 2019+x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=$ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2016+x & 2017+x & 2018+x & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2016+x & 2017+x & 2018+x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=$ $2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2016+x & 2017+x & 2018 & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2016+x & 2017+x & x & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+$ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2016+x & 2017+x & 2018 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2016+x & 2017 & 2018 & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+$ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2016+x & x & 2018 & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2016+x & 2017 & x & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+$ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2016+x & 2017 & 2018 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=\frac{1}{2}D(0)+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & 2017 & 2018 & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+$ $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2016 & x & 2018 & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2016 & 2017 & x & 2019 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2016 & 2017 & 2018 & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=$ $\frac{1}{2}D(0)+\frac{1}{2}D(0)=D(0)$	**2p** **2p**

Enunț subiect 3

Fie mulţimea $M=\left\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid A=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix}\right\}$.

a) (4p) Arătaţi că, dacă $P\in M$, atunci $P^n\in M, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

b) (3p) Arătați că, dacă $a,b\in\mathbb{R},\ b\neq 0,\ n\in\mathbb{N}^*$ și $X^n=\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix}$, atunci $X\in M$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Demonstrație pentru $P,Q \in M \Rightarrow PQ \in M$.	**1p**
Demonstrație prin inducție pentru $P_i \in M, i=\overline{1,n} \Rightarrow \prod_{i=\overline{1,n}} P_i \in M$	**2p**
Finalizare	**1p**
b) Dacă $X=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, din $X^{n+1}=X^n \cdot X = X \cdot X^n$ deducem că $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$	**1p**
Prin urmare, $\begin{cases} ax+2by=ax+bz \\ bx+(a+b)y=ay+bt \\ az+2bt=2bx+(a+b)z \\ bz+(a+b)t=2by+(a+b)t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2by=bz \\ bx+by=bt \\ 2bt=2bx+bz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=z \\ t=x+y \end{cases}$	**1p**
Deci $X \in M$.	**1p**

Enunț subiect 4

Fie funcția $f:\mathbb{R}^* \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\alpha x^{2-n}\frac{\sqrt{x^2+2018}}{x+1}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$. Determinați α și n pentru care dreapta de ecuație $y=2018$ este asimptotă orizontală la graficul funcției f către $-\infty$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2018}}{x+1}=-1$	**2p**
Dacă $n=0$ sau $n=1$, atunci $\lim\limits_{n\to-\infty} f(x)=\pm\infty$.	**1p**
Dacă $n\geq 3$, atunci $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.	**1p**
Deci $n=2$ și $f(x)=\alpha\frac{\sqrt{x^2+2018}}{x+1}$.	**1p**
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\alpha \Rightarrow y=-\alpha$ ecuația asimptotei orizontale și $\alpha=-2018$	**2p**