CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Ştiinţe ale naturii
CLASA a X-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Fie $a=\sqrt{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n+3^{4k+1}}, n\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{N}$.

a) (3p) Pentru $n=2$ și $k=1$ arătați că $\sqrt[3]{a}\in(2;3)$.

b) (4p) Determinați $n\geq 3$ și $k\in\mathbb{N}$ pentru care $a\in\mathbb{N}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $a=\sqrt{2+3^5}\Rightarrow\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{245}$	**1p**
$2^6=64<245<729=3^6\Rightarrow 2<\sqrt[3]{a}<3$	**2p**
b) $n\geq 5\Rightarrow U.C.(n!)=0\Rightarrow U.C.(n!+3^{4k+1})=3$ care nu este ultimă cifră de pătrat perfect.	**1p**
$n=4\Rightarrow U.C.(n!)=4\Rightarrow U.C.(n!+3^{4k+1})=7$ care nu este ultimă cifră de pătrat perfect.	**1p**
$n=3\Rightarrow a=\sqrt{6+3^{4k+1}}$ $a\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\exists p\in\mathbb{N}, 6+3^{4k+1}=p^2\Rightarrow 3\mid p\Rightarrow\exists m\in\mathbb{N}, p=3m$, deci $2+3^{4k}=3m^2\Rightarrow k=0$	**2p**

Enunț subiect 2

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $b_n=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 6+\ldots+\log_2(2n)$.

a) (3p) Arătați că $b_n\notin\mathbb{Q}$ pentru orice $n\geq 3$.

b) (4p) Arătați că $b_{24}>100$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $b_n=\log_2(2^n\cdot n!)=n+\log_2 n!$.	**1p**
$b_n\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\log_2 n!\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\exists c,d\in\mathbb{N}, n!=2^{\frac{c}{d}}$, adică $(n!)^d=2^c$.	**1p**
$n\geq 3\Rightarrow 3\mid n!\Rightarrow 3\mid 2^c$. Absurd.	**1p**
b) $b_{24}=24+\log_2 24!=24+\log_2(2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 24)$	**1p**
Dar $\log_2(2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 24)=22+\log_2(3^{10}\cdot 5^4\cdot 7^3\cdot 11^2\cdot 13\cdot 17\cdot 19\cdot 23)>$ $22+\log_2(2^{15}\cdot 2^9\cdot 2^8\cdot 2^6\cdot 2^{3,5}\cdot 2^4\cdot 2^4\cdot 2^{4,5})=76$ pentru că $3^{10}=9^5>8^5=2^{15}$, $5^4=625>512=2^9$, $7^3=343>256=2^8$, $11^2=121>64=2^6$,	**2p**

$169>128 \Rightarrow 13^2>2^7 \Rightarrow 13>2^{3,5}$, $17>16=2^4$, $19>16=2^4$ şi $529>512 \Rightarrow 23^2>2^9 \Rightarrow 23>2^{4,5}$.	**1p**

Enunț subiect 3

Fie $\varepsilon=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $c_k=1+\varepsilon^k$, $k\in\mathbb{N}$. Notăm $d_m=c_1+c_2+\ldots+c_m$, unde $m\in\mathbb{N}^*$, iar $e=c_1\cdot c_2\cdot\ldots\cdot c_{100}$.

a) (4p) Calculați partea reală a lui e.

b) (3p) Arătați că, dacă $m,n\in\mathbb{N}^*, m\neq n$, atunci $\operatorname{Re}(d_m)\neq\operatorname{Re}(d_n)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\varepsilon^{3k+r}=\varepsilon^r, k\in\mathbb{Z}, r\in\{0,1,2\}$ şi $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$.	**1p**
$e=2^{33}\cdot(1+\varepsilon)^{33}\cdot(1+\varepsilon^2)^{33}\cdot(1+\varepsilon)=2^{33}\cdot(1+\varepsilon+\varepsilon^2+1)^{33}\cdot(1+\varepsilon)$	**1p**
$e=2^{33}\cdot(1+\varepsilon)=2^{33}\cdot\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	**1p**
Deci $\operatorname{Re} e=2^{32}$	**1p**
b) $d_m=m+\varepsilon+\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon^m=$ $\begin{cases} m+\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon^4(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\ldots+\varepsilon^{m-2}(1+\varepsilon+\varepsilon^2)=m, m\in 3\mathbb{N} \\ m+\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon^4(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\ldots+\varepsilon^{m-3}(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon=m+\varepsilon, m\in 3\mathbb{N}+1 \\ m+\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon^4(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\ldots+\varepsilon^{m-4}(1+\varepsilon+\varepsilon^2)+\varepsilon+\varepsilon^2=m-1, m\in 3\mathbb{N}+2 \end{cases}$	**1p**
Prin urmare $\operatorname{Re}(d_{3m})=3m, \operatorname{Re}\{d_{3m+1}\}=3m+\frac{1}{2}, \operatorname{Re}(d_{3m+2})=3m+1$	**1p**
Naturale sunt doar prima şi ultima, iar egalitatea lor ar implica $3m=3n+1$ care e fără obiect.	**1p**

Enunț subiect 4

a) (3p) Dacă $z\in\mathbb{C}$, $\lvert z\rvert<\frac{1}{2}$, arătați că $\left|z^2-\frac{1}{2}z\right|<\frac{1}{2}$.

b) (4p) Oricare ar fi $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, arătați că are loc echivalența: $\frac{z^2+1}{z^2-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\operatorname{Re}(z)=0$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\left|z^2-\frac{1}{2}z\right|=\lvert z\rvert\cdot\left|z-\frac{1}{2}\right|\leq$	**1p**
$\leq\lvert z\rvert\left(\lvert z\rvert+\frac{1}{2}\right)$ $\lvert z\rvert\left(\lvert z\rvert+\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$. Finalizare.	**2p**
b) $\frac{z^2+1}{z^2-1}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z^2+1}{z^2-1}=\overline{\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)}\underset{z\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} z^2\bar{z}^2-z^2+\bar{z}^2-1=z^2\bar{z}^2+z^2-\bar{z}^2-1\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow z^2-\bar{z}^2=0\Leftrightarrow(z-\bar{z})(z+\bar{z})=0\,(1)$	**2p**
$z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}\Leftrightarrow z-\bar{z}\neq 0$; $(1)\Leftrightarrow z+\bar{z}=0\Leftrightarrow\operatorname{Re}(z)=0$.	**2p**