CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -

CLASA a IX-a
FILIERA tehnologică - PROFIL servicii, resurse naturale și protecția mediului

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

O sală de spectacol are 18 rânduri. Pe primul rând sunt 30 de scaune. Începând cu rândul al doilea, pe fiecare rând sunt cu 3 scaune mai mult decât pe rândul precedent.

a) (2p) Aflați numărul de scaune de pe ultimul rând.

b) (2p) Aflați numărul total de locuri din sala de spectacol.

c) (3p) Pentru un eveniment, s-au vândut toate locurile de pe primele 12 rânduri și încă 25 de locuri de pe rândul 13. Știind că biletele pentru locurile de pe primele 10 rânduri costă 50 lei, iar cele pentru locurile de pe ultimele 8 rânduri costă 30 lei, aflați ce sumă de bani s-a încasat pentru acel eveniment.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $a_{18} = a_1 + 17r = 30 + 17 \cdot 3 = 81$ locuri pe ultimul rând	**2p**
b) Numărul total de locuri $S_{18} = \frac{18 \cdot (a_1 + a_{18})}{2} = \frac{18 \cdot (30 + 81)}{2} = 999$	**2p**
c) Numărul de locuri de pe primele 10 rânduri: $S_{10} = \frac{10 \cdot (a_1 + a_{10})}{2} = 435$	**1p**
Numărul de locuri vândute de pe rândurile 11, 12 și 13: $a_{11} + a_{12} + 25 = 2a_1 + 21r + 25 = 123 + 25 = 148$	**1p**
Suma încasată: $435 \cdot 50$ lei $+ 148 \cdot 30$ lei $= 26190$ lei	**1p**

Enunţ subiect 2

Se consideră numerele $x_n = 1 - \frac{2^n}{2^n + 1}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

a) (3p) Calculați partea fracționară a numărului $x_1 + x_2 + x_3$.

b) (4p) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $|x_n| \geq \frac{1}{129}$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} = \frac{29}{45}$	**2p**

$\left\{\frac{29}{45}\right\}=\frac{29}{45}-\left[\frac{29}{45}\right]=\frac{29}{45}-0=\frac{29}{45}$	**1p**
b) $\lvert x_n\rvert=\left\lvert\frac{1}{2^n+1}\right\rvert=\frac{1}{2^n+1}$	**1p**
$\lvert x_n\rvert\geq\frac{1}{129}\Leftrightarrow\frac{1}{2^n+1}\geq\frac{1}{129}$	**1p**
$2^n+1\leq 129\Rightarrow 2^n\leq 128\Rightarrow n\in\{1,2,...,7\}$	**2p**

Enunț subiect 3

Demonstrați identitatea: $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^5}+...+\frac{n}{2^{2n-1}}=\frac{1}{9}\left(8-\frac{3n+4}{2^{2n-1}}\right)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
Verificarea	**2p**
Scrierea lui $P(k+1)$ sau $P(n+1)$	**1p**
Efectuarea etapei de demonstrație	**4p**

Enunț subiect 4

Se consideră ΔABC și punctele P, Q, R astfel încât $2\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}$, $3\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AM}$, unde punctul M este mijlocul laturii BC a triunghiului ABC.

a) (3p) Arătați că $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) (4p) Determinați numărul real k astfel încât punctele P, Q și R să fie coliniare.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
a) În $\triangle APR$, $\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AR}$ $2\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{PA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ $3\overrightarrow{AR}=2\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, deci, din cele trei relații, se obține $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$	**1p** **1p** **1p**
b) $\overrightarrow{PQ}=\frac{1-k}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$ (sau se calculează $\overrightarrow{QR}$) și, din a), $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$	**1p**
Condiția de coliniaritate devine: $\frac{1}{1-k}=\frac{4}{3k}$.	**2p**
$k=\frac{4}{7}$	**1p**