

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -**

CLASA a XII-a

FILIERA tehnologică - PROFIL servicii, resurse naturale și protecția mediului

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Pe mulțimea numerelor reale, se consideră legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$.

- a) (2p) Rezolvați în mulțimea \mathbb{R} inecuația $x * x \geq 3x^2 - 30$.
- b) (2p) Demonstrați că pentru $\forall x, y \in (-3, +\infty)$, avem $x * y \in (-3, +\infty)$.
- c) (3p) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2018 \text{ termeni}} = x$.

Detalii rezolvare subiect 1	Barem asociat
a) $x * x \geq 3x^2 - 30 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 15 \geq 3x^2 - 30 \Leftrightarrow -x^2 + 12x + 45 \geq 0$	1p
$x \in [-3; 15]$	1p
b) $x, y \in (-3, +\infty) \Rightarrow x + 3 > 0, y + 3 > 0 \Rightarrow (x + 3)(y + 3) > 0$	1p
$xy + 3x + 3y + 9 > 0 / \cdot 2 \Rightarrow 2xy + 6x + 6y + 18 > 0 / -3 \Rightarrow 2xy + 6x + 6y + 15 > -3$	1p
c) $\underbrace{x * x * \dots * x}_{2018 \text{ termeni}} = 2^{2017} (x + 3)^{2018} - 3$	1p
Ecuția devine: $(x + 3) \left[2^{2017} (x + 3)^{2017} - 1 \right] = 0$	1p
Soluțiile sunt: $x_1 = -3$ și $x_2 = -\frac{5}{2}$	1p

Enunț subiect 2

Fie mulțimea $G = \left\{ X(a) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

- a) (4p) Demonstrați că mulțimea G formează un grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
- b) (3p) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $X\left(\frac{1}{2}\right) \cdot X\left(\frac{2}{3}\right) \cdot X\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{n}{n+1}\right) = X(2018^{-1})$.

Detalii rezolvare subiect 2	Barem asociat
a) Demonstrația condițiilor pentru grup abelian	4p
b) $X(a) \cdot X(b) = X(ab)$	1p
$X\left(\frac{1}{2}\right) \cdot X\left(\frac{2}{3}\right) \cdot X\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \dots \cdot X\left(\frac{n}{n+1}\right) = X\left(\frac{1}{n+1}\right)$	1p

$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2018} \Rightarrow n = 2017$	1p
---	-----------

Enunț subiect 3

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x \ln(1-x), & x \in (-\infty, 0) \\ e^{-x}(x^2 + x + m^2 + m + 1), & x \in [0, +\infty) \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) (3p) Demonstrați că funcția f nu admite primitive pentru nicio valoare a lui $m \in \mathbb{R}$.

b) (4p) Pentru $m = 0$, arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 4 - \frac{8}{e}$.

Detalii rezolvare subiect 3	Barem asociat
a) $\lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0} x \ln(1-x) = 0$	1p
$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} e^{-x}(x^2 + x + m^2 + m + 1) = m^2 + m + 1$	1p
$m^2 + m + 1 \neq 0$ pentru $\forall m \in \mathbb{R}$ și $x = 0$ este punct de discontinuitate de speța I, deci f nu admite primitive	1p
b) Aplicarea metodei integrării prin părți o dată	1p
Aplicarea metodei integrării prin părți a doua oară	1p
Obținerea rezultatului $\int_0^1 f(x) dx = -e^{-x}(x^2 + 3x + 4) \Big _0^1$	1p
Obținerea rezultatului final	1p

Enunț subiect 4

a) (3p) Determinați o primitivă F a funcției $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$, $x \in (-1, +\infty)$, cu proprietatea că $F(4) = 1 - \ln 125$.

b) (4p) Determinați $a \in \mathbb{R}_+^*$ dacă $\int_3^4 \frac{x+1}{x^2-4} dx = \ln \sqrt[4]{\frac{8a}{5}}$.

Detalii rezolvare subiect 4	Barem asociat
a) $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3 \ln(x+1) + c$	2p
$F(4) = 4 - 3 \ln 5 + c \Rightarrow 4 - 3 \ln 5 + c = 1 - \ln 125 \Rightarrow c = -3$, $F(x) = \frac{x^2}{2} - x - 3 \ln(x+1) - 3$	1p
b) $\int_3^4 \frac{x+1}{x^2-4} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2-4) + \frac{1}{4} \ln \left(\frac{x-2}{x+2} \right) \right]_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{48}{5}$	2p
$\frac{1}{4} \ln \frac{48}{5} = \ln \sqrt[4]{\frac{8a}{5}} \Rightarrow \frac{1}{4} \ln \frac{48}{5} = \frac{1}{4} \ln \frac{8a}{5} \Rightarrow 8a = 48 \Rightarrow a = 6$	2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



SOCIETATEA DE
ȘTIINȚE MATEMATICE
DIN ROMÂNIA



INSPECTORATUL ȘCOLAR
AL MUNICIPIULUI
BUCUREȘTI