CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 25.02.2018 -

CLASA a XI-a
FILIERA tehnologică - PROFIL servicii, resurse naturale şi protecția mediului

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

a) (2p) Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că $A^2 = a \cdot A$.

b) (2p) Determinați $x \in \mathbb{C}$ astfel încât $\det\left(I_2 + A + x^2 \cdot A^t\right) = 1$.

c) (3p) Calculați suma $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2018}$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $A^2 = \begin{pmatrix} 10 & -30 \\ -30 & 90 \end{pmatrix} = 10A \Rightarrow a = 10$	**2p**
b) $I_2 + A + x^2 \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2+x^2 & -3-3x^2 \\ -3-3x^2 & 10+x^2 \end{pmatrix}$	**1p**
$\det\left(I_2 + A + x^2 \cdot A^t\right) = 1 \Leftrightarrow 10x^2 + 11 = 1$ și $x = \pm i$	**1p**
c) $A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{2018} = A + 10A + 10^2 A + \ldots + 10^{2017} A =$	**1p**
$= A\left(1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{2017}\right) = A \cdot \dfrac{10^{2018} - 1}{9}$	**2p**

Enunţ subiect 2

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-2;1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax^3 + x^2 - ax - 1}{x^2 + x - 2}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) (3p) Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{4}{3}$.

b) (4p) Arătați că, pentru orice $a \in \mathbb{R}^*$, funcția f admite o asimptotă oblică spre $+\infty$ care conține punctul $P(1;1)$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax^3 + x^2 - ax - 1}{x^2 + x - 2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{ax\left(x^2 - 1\right) + \left(x^2 - 1\right)}{(x-1)(x+2)} =$	**1p**

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)(ax+1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2(a+1)}{3}$	**1p**
$\dfrac{2(a+1)}{3}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow a=1$	**1p**
b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+x^2-ax-1}{x^3+x^2-2x}=a$	**1p**
$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{ax^3+x^2-ax-1}{x^2+x-2}-ax\right)=1-a$	**1p**
Asimptota oblică are ecuația $y=ax+1-a$	**1p**
Punctul $P(1;1)$ aparține asimptotei oblice $\Leftrightarrow 1=a\cdot 1+1-a \Leftrightarrow 1=1$ adevărat	**1p**

Enunț subiect 3

Se consideră punctele $A(2;3)$, $B(-1;0)$, $C(x^2,2x-1)$ și matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x^2 & 2x-1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) (3p) Arătați că punctele A,B,C sunt necoliniare pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) (4p) Calculați suma: $S=\det M(1)+\det M(2)+.......+\det M(2018)$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
a) Condiția de coliniaritate: $\det M(x)=0$.	**1p**
$3x^2-6x+6=0$, cu $\Delta<0\Rightarrow x\notin\mathbb{R}$	**2p**
b) $\det M(x)=3x^2-6x+6\Rightarrow S=3(1^2+2^2+.....+2018^2)-6(1+2+....+2018)+6\cdot 2018$	**2p**
$S=1009\cdot 2019\cdot 4031+12108$	**2p**

Enunț subiect 4

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6}, & x<2 \\ 2^{ax}-2^{a(x-1)+2}+\sqrt{x^2+x+3}, & x\geq 2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

Determinați numărul real a, astfel încât funcția f să aibă limită în punctul $x_0=2$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
$\lim\limits_{x\nearrow 2}f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\nearrow 2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x-2)(x-3)}=-1$	**2p**
$\lim\limits_{x\searrow 2}f(x)=\lim\limits_{x\searrow 2}\left(2^{ax}-2^{a(x-1)+2}+\sqrt{x^2+x+3}\right)=2^{2a}-2^{a+2}+3$	**2p**
$2^{2a}-2^{a+2}+3=-1\Rightarrow 2^{2a}-4\cdot 2^a+4=0\Rightarrow (2^a-2)^2=0\Rightarrow 2^a=2\Rightarrow a=1$	**3p**