CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "*ADOLF HAIMOVICI*"

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Uman

Clasa a IX–a

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Problema 1.

Se consideră funcţiile $f_m(x)=(m-1)x^2+2(m-2)x-3+m,\ m\in\mathbf{R},\ m\neq 1$.

a) Să se determine *m* astfel încât G_{f_m} să intersecteze axa (O_x) în două puncte separate de axa (O_y).

b) Să se demonstreze că parabolele G_{f_m} (graficul funcției f_m) trec printr-un punct fix (cu coordonatele independente de *m*).

Soluție:

a) Se impun condiţiile: $\begin{cases}\Delta>0\\ \mathrm{P}<0\end{cases}$ Rezultă $\begin{cases}\Delta=4>0\\ \mathrm{P}=\dfrac{m-3}{m-1}<0\end{cases}$ -- 2 pct.

Obținem $m\in(1,3)$ -- 2 pct.

b) Condiţia ca parabolele să treacă printr-un punct fix: Punctul $A(a,b)\in G_{f_m},\ \forall m\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$

Impune $(m-1)a^2+2(m-2)a-3+m=b,\ \forall m\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ -- 1 pct.

Rezultă $a=-1$ şi $b=0$ -- 2 pct.

Problema 2.

Pe latura [*AB*] şi diagonala [*AC*] a paralelogramului *ABCD* se iau punctele *M* şi respectiv *N* astfel încât $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$. Demonstraţi că punctele *M*, *N* şi *D* sunt coliniare.

Soluție:

$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ ---2 pct.

$\overrightarrow{ND}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ -- 2 pct.

$\overrightarrow{ND}=-5(\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC})$ --- 1 pct.

$\overrightarrow{ND}=-5\overrightarrow{NM}$ -- 1 pct.

Deducem că punctele $M,\ N,\ D$ sunt coliniare.---1 pct.

Problema 3.

Să se determine patru numere reale în progresie geometrică ştiind că suma termenilor extremi este egală cu triplul mediei aritmetice a termenilor egal depărtaţi de cei extremi, iar primul termen este $a\in\mathbf{R}^*$.

Soluție:

Scrie numerele a, aq, aq^2, aq^3, unde q este rația progresiei geometrice ---------------------------------1 pct.

Impune condiția $a + aq^3 = 3 \cdot \frac{aq+aq^2}{2}$ --- 1 pct.

Aduce la forma $2(1 + q^3) = 3 \cdot q(q + 1)$ --- 1 pct.

Obține ecuația $(q + 1)(2q^2 - 5q + 2) = 0$ --- 1 pct.

Rezultă: $q_1 = -1,\ q_2 = 2,\ q_3 = \frac{1}{2}$ --- 2 pct.

Obținem progresiile geometrice: $\begin{cases} a;\ -a;\ a;\ -a \\ a;\ 2a;\ 4a;\ 8a \\ a;\ \frac{a}{2};\ \frac{a}{4};\ \frac{a}{8} \end{cases}$ -- 1 pct.

Problema 4.

a) Media vârstelor persoanelor dintr-o cameră este egală cu numărul lor. În cameră intră un bărbat de 29 de ani. Surprinzător, media vârstelor persoanelor rămâne egală cu numărul lor. Câte persoane erau inițial în cameră?

b) Un elev a ales un număr întreg, l-a înmulțit cu 0,42 și rezultatul l-a aproximat cu cel mai apropiat întreg. După aceasta a înmulțit numărul astfel obținut cu 0,42 și rezultatul l-a aproximat din nou cu cel mai apropiat întreg, ultimul fiind egal cu 8. Ce număr a ales elevul?

Soluție:

a) Fie $v_1, v_2, ..., v_n$, vârstele celor n persoane.

Avem: $\frac{v_1 + v_2 + ... + v_n}{n} = n$ ……………………………………………………………………….……….1 pct.

Apoi $\frac{v_1 + v_2 + ... + v_n + 29}{n+1} = n+1$ …………………………………………………………………………1 pct.

Rezultă $\frac{n^2 + 29}{n+1} = n+1 \Rightarrow n = 14$ …………………………………………………………………………1 pct.

b) Fie $x \in \mathbf{Z}$ numărul ales de elev și $y \in \mathbf{Z}$ rezultatul primei aproximări.

Din enunț deducem $y - 0,5 \le x \cdot 0,42 < y + 0,5$ (1) și $7,5 \le y \cdot 0,42 < 8,5$ (2) ……………………………1 pct.

Din relația (2) rezultă $y \in [18, 20]$, $y \in \mathbf{Z}$ …………………… ....……………………………………..… 1 pct.

Folosind relația (1) obținem $x \in [42, 48]$, $x \in \mathbf{Z}$ …………………… ....………………………………..…… 1 pct.

Elevul a ales unul dintre următoarele numere: 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48. …………………………..……. 1 pct.