CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -

CLASA a IX-a
FILIERA TEORETICĂ, PROFIL UMAN , SPECIALIZĂRILE FILOLOGIE ŞI ŞTIINŢE SOCIALE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1.

Arătați că există o infinitate de triunghiuri dreptunghice cu lungimile laturilor în progresie aritmetică.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
Laturile triunghiului au lungimile $x-r; x; x+r \quad (x>r, r>0)$	1p
Triunghiul este dreptunghic cu ipotenuza cu lungimea cea mai mare $\Rightarrow (x+r)^2 = x^2 + (x-r)^2$	2p
Se obține $x = 4r$	2p
O infinitate de triunghiuri în laturile: $3r; 4r; 5r; r>0$	2p

Enunţ subiect 2.

Se dau mulţimile $A = \{7, 13, 19, ...\}$ şi $B = \{20, 27, 34, ...\}$.

a) (2p) Arătaţi că $A \cap B \neq \varnothing$.

b) (3p) Aflaţi câte elemente mai mici decât 433 are $A \cap B$.

c) (2p) Aflaţi numărul $n \in \mathbb{N}$, ştiind că suma primelor n elemente din A este 1280.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) Elementele din A au forma $7+6n, n \in \mathbb{N}$, iar cele din B au forma $20+7p, p \in \mathbb{N}$. De exemplu $55 \in A \cap B$ pentru că $55 = 7+6\cdot 8 = 20 + 7\cdot 5$	2p
b) Un element este în $A \cap B$ dacă există $n, p \in \mathbb{N}$ astfel încât: $7+6n = 20+7p \Leftrightarrow 6n = 6+7+7p \Leftrightarrow 6(n-1) = 7(p+1)$, adică $n-1$ este multiplu al lui 7 $\Leftrightarrow n-1 = 7k, k \in \mathbb{N}$. Rezultă $6\cdot 7k = 7(p+1) \Leftrightarrow p+1 = 6k, k \in \mathbb{N}^*$. Am determinat $A \cap B = \{7+6(7k+1), k \in \mathbb{N}^*\} = \{13+42k, k \in \mathbb{N}^*\}$. Atunci $13+42\cdot k < 433 \Leftrightarrow 42\cdot k < 420 \Leftrightarrow 0 < k < 10, k \in \mathbb{N}$, deci sunt 10 numere.	3p
c) $7+7+6+7+6\cdot 2+...+(7+6(n-1)) = 1280 \Rightarrow$ $7\cdot n + 6(1+2+...+n-1) = 1280 \Rightarrow 7n + 6\cdot\frac{(n-1)n}{2} = 1280$ $\Rightarrow 3n^2 + 4n - 1280 = 0, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow 3n^2 = 4(320-n), n \in \mathbb{N}$ Pentru a rezolva cu mai puţine calcule, se poate observa că n este multiplu de 4. Finalizare, $n = 20$.	2p

Enunţ subiect 3.

Fie mulţimile $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\left|\frac{3x+2}{2x+3}\in\mathbb{Z}\right.\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|5-|x-2|\right|\ge 4\right\}$ Determinaţi elementele mulţimii $A\cap B$.

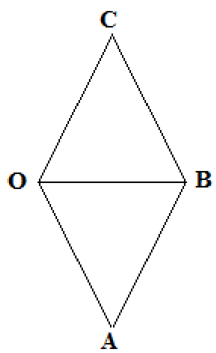
Detalii rezolvare subiect 3	Barem asociat
$(3x+2)\vdots(2x+3)\Rightarrow[3(2x+3)-5]\vdots(2x+3)$	1p
$5\vdots(2x+3)\Rightarrow A\in\{-4;-2;-1;1\}$	1p
$5-\lvert x-2\rvert\le -4\Rightarrow \lvert x-2\rvert\ge 9$	1p
$x-2\ge 9$ sau $x-2\le -9$ $\Rightarrow x\in(-\infty;-7]\cup[11;+\infty)$	1p
$5-\lvert x-2\rvert\ge 4\Rightarrow \lvert x-2\rvert\le 1\Rightarrow x\in[1;3]$	1p
$B=(-\infty;-7]\cup[1;3]\cup[11;+\infty)$	1p
$A\cap B=\{1\}$	1p

Enunţ subiect 4.

Se consideră în plan punctele O,A,B,C astfel încât $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$ și $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$.
Demonstraţi că:

a) (4p) Patrulaterul $OABC$ este romb.

b) (3p) $|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{3}|\overrightarrow{OB}|$.

Detalii rezolvare subiect 4	Barem asociat
a)  $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ şi $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$ (ipoteza), de unde $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$, adică $OABC$ este paralelogram. Pentru că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, rezultă că este romb.	4p
b) $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$, iar suprafaţa rombului este compusă din două triunghiuri echilaterale, de unde $AC=\sqrt{3}\cdot AB$	3p