CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -
FILIERA TEORETICĂ - PROFIL UMAN - SPECIALIZAREA ȘTIINȚE SOCIALE

CLASA a XII-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}$.

a) Arătați că dacă o matrice $X\in M_3(\mathbb{R})$ are proprietatea $AX=XA$, atunci cel puțin șase dintre elementele matricei X sunt nule.

b) Determinați numărul matricelor X cu proprietatea $X\cdot X=A$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $AX=XA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x&y&z\\4x'&4y'&4z'\\9x''&9y''&9z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&4y&9z\\x'&4y'&9z'\\x''&4y''&9z''\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x&y&z\\x'&y'&z'\\x''&y''&z''\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$	**2p**
$x'=x''=0,\ y=y''=0,\ z=z'=0$	**2p**
b) $X\cdot X\cdot X=AX$ și $X\cdot X\cdot X=XA\Rightarrow AX=XA$, conform a) $X=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&y&0\\0&0&z\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$	**1p**
$X\cdot X=A\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x^2&0&0\\0&y^2&0\\0&0&z^2\end{pmatrix}=A$ 8 matrice cu proprietatea din enunț	**2p**

Enunț subiect 2

a) Calculați $A=\begin{pmatrix}a^2&-1&a\\-1&a&a^2\\a&a^2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&a^2&-1\\a^2&-1&a\\-1&a&a^2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-a&-a^2\\-a&-a^2&1\\-a^2&1&-a\end{pmatrix}$, unde a este soluție a ecuației $x^2+x-1=0$.

b) Determinați $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ pentru care $\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}=B$, unde $B\in M_3(\mathbb{R})$ și are una dintre linii egală cu $\begin{pmatrix}4&8&16\end{pmatrix}$.

Detalii rezolvare	**Barem**

	asociat
a) $a^2+a+1=0$	**1p**
Fiecare element al matricei A este egal cu a^2+a+1 , deci $A=0_3$	**2p**
b) $\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2y & 2z\\4x & 4y & 4z\\8x & 8y & 8z\end{pmatrix}$	**1p**
$\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 8\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ sau $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1 & 2\end{pmatrix}$	**3p**

Enunț subiect 3

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}a & b & 1\\1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a & 1 & 3\\b & 2 & 2\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Z})$.

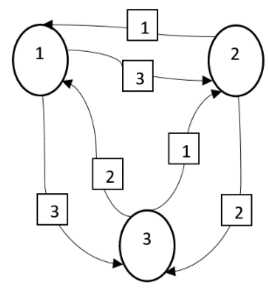
a) Determinați a , $b\in\mathbb{Z}$ astfel încât matricea $A(BA-I_3)-(AB+4I_3)A-3A+2B$ să aibă aceeași sumă de elemente pe fiecare linie .

b) Arătați că dacă suma elementelor matricei A este un număr par, atunci numerele a , b au parități diferite.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A(BA-I_3)-(AB+4I_3)A-3A+2B=ABA-A-ABA-4A-3A+2B=-8A+2B$	**2p**
$-6a-8b=-40+2b=-38$	**1p**
$a=5,\ b=1$	**1p**
b) Dacă suma elementelor matricei A este un număr par atunci $a+b+13$ este număr par, deci $a+b$ este impar.	**2p**
a și b au parități diferite	**1p**

Enunț subiect 4

Se consideră trei licee. Dacă de la liceul **1** se poate ajunge la liceul **2** cu bicicleta (pe pistă specială cu sens unic) atunci în matricea B scriem în linia 1 coloana 2 distanța (număr întreg de kilometri) dintre cele două licee. Dacă nu se poate ajunge, scriem x. Pe diagonala principală vom scrie 0 (de la un liceu se poate ajunge la el însuși).



a) Scrieți matricea asociată schemei alăturate.

b) Scrieți toate matricele asociate situației de mai sus, cu suma elementelor minimă şi care asigură posibilitatea de ajungere pe bicicletă între oricare două licee.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\1 & 0 & 2\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
b) $B_1=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $B_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$	**2** x **2p**