CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -

CLASA a X-a
FILIERA TEORETICĂ, PROFIL UMAN , SPECIALIZĂRILE FILOLOGIE ŞI ŞTIINȚE SOCIALE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

a) (2p) Calculați: $(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) (3p) Demonstraţi egalitatea: $(5-1)(5+1)\left(5^2+1\right)\left(5^4+1\right)\left(5^8+1\right)\ldots\left(5^{2^{2016}}+1\right)=5^{2^{2017}}-1$.

c) (3p) Arătați că $\left(5^{2^{2017}}-1\right)\vdots 2^{2018}$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $(x-1)\left(x^4+1\right)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)=$ $=\left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right)=x^8-1$	1p 1p
b) $(5-1)(5+1)=5^2-1$ $(5^2-1)(5^2+1)=5^4-1$	1p
$(5^4-1)(5^4+1)=5^8-1$ $\vdots$ $\left(5^{2^{2016}}-1\right)\left(5^{2^{2016}}+1\right)=5^{2^{2017}}-1$	2p
c) $(5-1)\vdots 2, (5+1)\vdots 2$	1p
$(5^2+1)\vdots 2, (5^4+1)\vdots 2, \ldots \left(5^{2^{2016}}+1\right)\vdots 2$	1p
$\left(5^{2^{2017}}+1\right)\vdots \underbrace{2\cdot 2\cdot \cdots \cdot 2}_{de\ 2018\ ori}$	1p

Enunţ subiect 2.

Fie numărul $a=\log_2 20$.

a) (1p) Arătați că $a\in(4;5)$.

b) (3p) Arătați că $\log_2 5=a-2$.

c) (3p) Exprimaţi în funcție de a numărul $b=\log_2(3125\cdot 16^{504})$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $4=\log_2 16<\log_2 20<\log_2 32=5$, deci $a\in(4;5)$	1p
b) $a=\log_2 20=\log_2 2^2\cdot 5=2+\log_2 5$.	2p
Atunci $\log_2 5=a-2$.	1p
c) $b=\log_2(3125\cdot 16^{504})=\log_2(5^5\cdot(2^4)^{504})$	1p
$b=5\log_2 5+4\cdot 504=5a+2006$	2p

Enunţ subiect 3.

a) (2p) Arătați că $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ și $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) (3p) O broască țestoasă pornește la un drum de 1024 metri. În fiecare zi parcurge o jumătate din drumul rămas după ziua precedentă. În câte zile ajunge broasca la capătul drumului, știind că aceasta parcurge în fiecare zi un număr întreg de metri?

c) (2p) Aceeaşi întrebare, pentru lungimea drumului egală cu N metri, $N = 2^n, n \in \mathbb{N}^*$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
a) $2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$, $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$	1p
b) D=1024=2^{10}m, în prima zi broasca pargurge 2^9m, a doua zi 2^8m, a treia zi 2^7m,... a zecea zi 2^0m=1m şi mai rămâne 1m.	2p
Concluzie: 11 zile	1p
c) D=N metri, atunci în prima zi broasca pargurge $\frac{1}{2}\mathrm{N} = 2^{\mathrm{n}-1}$ m, a doua zi $2^{\mathrm{n}-2}$ m, a treia zi $2^{\mathrm{n}-3}$m, ...	2p
În a n-a zi, parcurge 1 m şi mai rămâne tot 1 m.Concluzie: n+1 zile.	1p

Enunţ subiect 4.

Se consideră expresia $E(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$.

a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care expresia $E(x)$ are sens.

b) Arătați că $\left[\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt{5} \cdot E(0)} + \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt{5} \cdot E(6)}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{375}} \in (0,1)$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
a) Condiția de existență $x^2 - 6x + 5 \geq 0$	1p
$x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$	2p
b) $\left[\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt{5} \cdot E(0)} + \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt{5} \cdot E(6)}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{375}} \in (0,1)$ $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt{5} \cdot E(0)} = \frac{3\sqrt[3]{3}}{5}$	1p
$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt{5} \cdot E(6)} = \frac{2\sqrt[3]{3}}{5}$	1p
$\frac{1}{\sqrt[3]{375}} = \frac{1}{5\sqrt[3]{3}}$	1p
$\left[\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt{5} \cdot E(0)} + \frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt{5} \cdot E(6)}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{375}} = \frac{1}{5} \in (0,1)$	1p