



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 1.

Un joc de calculator se desfășoară după regula următoare: la fiecare rundă, jucătorul alege un număr $a \in \mathbb{N}^*$, după care calculatorul alege la întâmplare un număr $x \in \mathbb{R}$ și dacă $\frac{15-3x}{7} \geq a$ sau $x+25 \geq a$, atunci jucătorul câștigă a puncte.

- Stabiliți dacă, pentru $a=12$ și $x=-24$, jucătorul câștigă 12 puncte.
- Demonstrați că pentru alegerea $a=12$ jucătorul poate să nu câștige 12 puncte.
- Demonstrați că se pot alege numere $a \in \mathbb{N}$ încât la orice $x \in \mathbb{R}$ ales de calculator, jucătorul să câștige a puncte și aflați numărul maxim de puncte pe care le poate câștiga la o rundă a jocului.

Soluție:

- Pentru $a=12$ și $x=-24$, $\frac{15-3x}{7} \geq a$ este adevărată și $x+25 \geq a$ este falsă 1p
deci jucătorul câștigă 12 puncte. 1p
- $\frac{15-3x}{7} \geq 12 \Leftrightarrow x \leq -23$ și $x+25 \geq a \Leftrightarrow x \geq -13$ 1p
 $\Rightarrow x \in \emptyset$ 1p
- Pentru a câștiga trebuie $x \in \left(-\infty; \frac{15-7a}{3}\right]$ sau $x+25 \geq a \Leftrightarrow x \in [a-25; +\infty)$ 1p
 \Rightarrow dacă jucătorul alege $a \in \mathbb{N}^*$ încât $\frac{15-7a}{3} \geq a-25 \Leftrightarrow a \leq 9$, atunci câștigă 1p
și dacă alege $a=9$ câștigă număr maxim de puncte, respectiv 9 puncte 1p



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 2.

a) Arătați că $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{n}$, pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

b) Determinați numerele naturale nenule x și y , care verifică $\frac{1}{x \cdot y} = 1 - \frac{1}{y}$.

c) Determinați funcția $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ care pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, verifică relația

$$\frac{1}{f(1) \cdot f(2)} + \frac{1}{f(2) \cdot f(3)} + \frac{1}{f(3) \cdot f(4)} + \dots + \frac{1}{f(n-1) \cdot f(n)} = 1 - \frac{1}{f(n)}$$

Soluție:

a) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$,

sau demonstrare prin inducție 2p

b) $x = \frac{1}{y-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow y-1=1 \Rightarrow y=2$ și $x=1$ 2p

c) $n=2 \Rightarrow \frac{1}{f(1) \cdot f(2)} = 1 - \frac{1}{f(2)} \Rightarrow f(1)=1, f(2)=2$ 1p

și din $\frac{1}{f(1) \cdot f(2)} + \frac{1}{f(2) \cdot f(3)} + \frac{1}{f(3) \cdot f(4)} + \dots + \frac{1}{f(n-1) \cdot f(n)} = 1 - \frac{1}{f(n)}$ și

$$\frac{1}{f(1) \cdot f(2)} + \frac{1}{f(2) \cdot f(3)} + \frac{1}{f(3) \cdot f(4)} + \dots + \frac{1}{f(n-1) \cdot f(n)} + \frac{1}{f(n) \cdot f(n+1)} = 1 - \frac{1}{f(n+1)}, \text{ rezultă}$$

$1 - \frac{1}{f(n)} + \frac{1}{f(n) \cdot f(n+1)} = 1 - \frac{1}{f(n+1)}$, deci $f(n+1) = 1 + f(n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ 1p

$\Rightarrow f(n) = n$ 1p



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

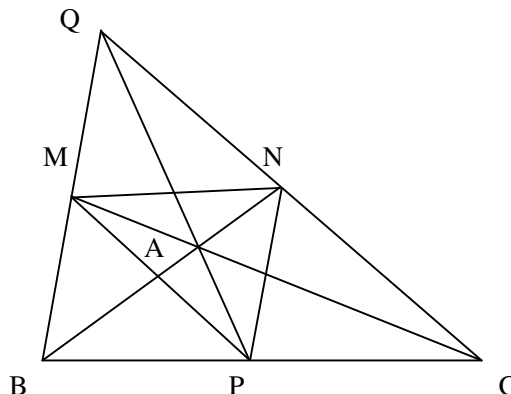
Problema 3.

Fie triunghiul ABC și punctele M , N și P astfel încât $\overline{BN} = 3 \cdot \overline{AN}$, $\overline{CM} = 3 \cdot \overline{AM}$ și $\overline{BP} = \overline{PC}$.

- Demonstrați că $MN \parallel BC$.
- Dacă $BM \cap CN = \{Q\}$, demonstrați că A este centrul de greutate al triunghiului QBC și $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AQ} = \vec{0}$.
- Demonstrați că triunghiurile QBC și MNP au același centru de greutate.

Soluție:

Conform figurii avem:



- $\overline{BN} = 3 \cdot \overline{AN}$, $\overline{CM} = 3 \cdot \overline{AM} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow MN \parallel BC$ 3p
- $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, $MN \parallel BC \Rightarrow [MN]$ linie mijlocie în triunghiul $QBC \Rightarrow A$ este centrul de greutate al triunghiului $QBC \Rightarrow \overline{AQ} + \overline{AB} + \overline{AC} = \vec{0}$ 2p
- Având A centrul de greutate al triunghiului QBC ,
 $\overline{AN} + \overline{AM} + \overline{AP} = -\frac{1}{2} \cdot \overline{AB} + \left(-\frac{1}{2} \cdot \overline{AC}\right) + \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{AC}) = \vec{0} \Rightarrow$
 $\Rightarrow A$ este centrul de greutate și al triunghiului MNP 2p



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a IX-a

BAREM

Problema 4.

Fie mulțimea tuturor funcțiilor de gradul al doilea, $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma $f_m(x) = x^2 + 2(m-1)x + (1-4m)$, $m \in \mathbb{R}$ și considerăm familia parabolilor asociate acestor funcții.

- Arătați că există $m \in \mathbb{R}$ pentru care punctul $A(-1; 3)$ este pe parabola asociată funcției f_m .
- Arătați că există un punct situat pe toate parabolele familiei.
- Arătați că punctul $B(2;3)$ nu este situat pe nici una din parabolele familiei și determinați mulțimea tuturor punctelor cu această proprietate.

Soluție:

a) $f_m(-1) = 3$ 1p

$\Rightarrow (-1)^2 + 2(m-1) \cdot (-1) + (1-4m) = 3 \Rightarrow m = \frac{1}{6}$ 1p

b) $P(a; b)$ este pe toate parabolele $\Leftrightarrow f_m(a) = b, (\forall) m \in \mathbb{R}$ 1p

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 - b = 2m(2-a), (\forall) m \in \mathbb{R}$ 1p

$\Rightarrow a = 2, b = 1$ și $P(2; 1)$ este pe toate parabolele 1p

c) $B(2;3) \in G(f_m) \Leftrightarrow f_m(2) = 3 \Leftrightarrow 1 = 3$, contradicție, deci $B(2;3)$ nu este pe nici una din parabole 1p

$M(x_0; y_0) \in G(f_m) \Leftrightarrow f_m(x_0) = y_0 \Leftrightarrow 2m(x_0 - 2) = y_0 - x_0^2 + 2x_0 - 1,$

deci dacă $x_0 \neq 2$, alegând pentru $m \in \mathbb{R}$ valoarea $m = \frac{y_0 - x_0^2 + 2x_0 - 1}{2(x_0 - 2)}$, obținem $M(x_0; y_0) \in G(f_m)$.

Pentru $x_0 = 2$ avem punctul $P(2; 1)$ care este pe toate parabolele familiei și atunci punctele nesituate pe nici o parabolă a familiei sunt punctele $Q(2; y)$ cu $y \neq 1$, aceasta deoarece având $f_m(2) = 1$, vom avea $f_m(2) \neq y$ pentru orice $y \neq 1$.

Punctele $Q(2; y)$ cu $y \neq 1$ descriu dreapta de ecuație $x = 2$ din care se exclude punctul $P(2; 1)$ 1p