



MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 1.

Fie pe mulțimea \mathbb{Z} a numerelor întregi legea de compoziție " \circ ", dată prin $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, (\forall) $x, y \in \mathbb{Z}$.

- Verificați $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, (\forall) $x, y \in \mathbb{Z}$.
- Demonstrați că " \circ " este comutativă și asociativă.
- Stabiliți dacă structura $(\mathbb{Z}; \circ)$ are element neutru.
- Dacă $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{4034}$ sunt divizorii întregi ai numărului 2^{2017} , calculați $d_1 \circ d_2 \circ d_3 \dots \circ d_{4034}$.

Soluție:

- $3(x+1)(y+1) - 1 = (3x+3)(y+1) - 1 = 3xy + 3x + 3y + 3 - 1 = 3xy + 3x + 3y + 2 = x \circ y$ 1p
- Demonstrație pentru comutativitate 1p
Demonstrație pentru asociativitate 2p
- Presupunând element neutru $e \in \mathbb{Z}$ se deduce $e = -\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Z}; \circ)$ nu are element neutru 2p
- Cum $x \circ (-1) = -1$ și $(-1) \circ y = -1$, (\forall) $x, y \in \mathbb{Z}$
și $(\mathbb{Z}; \circ)$ este asociativă iar $d = -1$ este divizor al lui $2^{2017} \Rightarrow d_1 \circ d_2 \circ d_3 \dots \circ d_{4034} = -1$ 1p



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 2.

Consumul de energie electrică realizat de familia Popescu, pe durata a 24 ore, este modelat de o funcție $K : [0; 24] \rightarrow \mathbb{R}_+$, cu $K(0) = 0$ și care este derivabilă și verifică $K'(t) = (t+1)e^{1-t}$, $(\forall)t \in [0; 24]$, iar $K(t)$ reprezintă cantitatea de energie electrică consumată în intervalul de timp $[0; t]$, exprimat în Kw/h .

- Demonstrați că $F(t) = -(t+1) \cdot e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, este primitivă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = t \cdot e^{-t}$.
- Demonstrați $K(t) = 2e - (t+2) \cdot e^{1-t}$, $(\forall)t \in [0; 24]$.
- Verificați că în prima oră familia Popescu consumă mai puțin de $2,5 Kw/h$.
- Considerând, pe parcursul unei zile, intervalele orare $[0; 1]$, $[1; 2]$, $[2; 3]$, ..., $[23; 24]$, arătați că cel mai mare consum de energie electrică se realizează în intervalul orar $[0; 1]$.

Soluție:

- F este derivabilă pe \mathbb{R} și $F'(t) = f(t)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$ 1p
- $K(t) = \int (t+1)e^{1-t} dt = -(t+2)e^{1-t} + C$ 2p
 $K(0) = 0 \Rightarrow C = 2e$ 1p
- $K(1) = 2e - 3 < 2 \cdot 2,72 - 3 < 2,5$ 1p
- Consumul în a n -a oră, $n \geq 2$, este $g(n) = K(n) - K(n-1) = e^{1-n}((n+1)e - n - 2)$ 1p
Se arată că $g(n) < g(n-1)$, $n \geq 2$ este echivalent cu $n(e-1) > 2$,
inegalitate confirmată de $n \geq 2$ și $e-1 > 1$ 1p



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 3.

Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} / a, b \in \mathbb{Z}_6 \right\}$.

- Determinați numărul elementelor mulțimii G .
- Arătați că $(G; +)$ este grup abelian.
- Calculați suma elementelor mulțimii G .

Soluție:

- Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$.

Cum $a \in \mathbb{Z}_6$ poate fi ales în 6 moduri și $b \in \mathbb{Z}_6$ tot în 6 moduri, G are 36 de elemente 2p

- Se arată cu ușurință că pentru orice $A, B \in G \Rightarrow A+B \in G$ și $(G; +)$ este structură comutativă și asociativă,

cu element neutru $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ iar fiecare $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in G$ are simetrică $-A = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in G$ 3p

- Matricele $X \in G$ cu proprietatea $X = -X$ sunt $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ cu $a \in \{\hat{0}; \hat{3}\}$ și $b \in \{\hat{0}; \hat{3}\}$ și suma lor este

matricea $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$. Celelalte matrice X din G se asociază fiecare cu simetrica $-X$ și cum fiecare matrice

este simetrică doar unei singure matrice, suma elementelor mulțimii G este $O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ 2p



CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017



Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XII-a

BAREM

Problema 4.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

a) Demonstrați că $\int_0^1 f^2(x) dx = \frac{13}{3}$.

b) Calculați $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x \cdot f(x)}$.

c) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^3 f(t) dt$

Soluție:

a) $\int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_0^1 = \frac{13}{3}$ 2p

b) Notăm $\sqrt{x^2 + 4} = t \Rightarrow x^2 + 4 = t^2 \Rightarrow x dx = t dt$
 $x = \sqrt{5} \Rightarrow t = 3$, $x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = 4$

$\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x \cdot f(x)} = \int_3^4 \frac{t dt}{(t^2 - 4) \cdot t} = \int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{t-2}{t+2} \right) \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$ 3p

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^3 f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} \int_0^x t^3 \sqrt{t^2 + 4} dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^3 \sqrt{t^2 + 4} dt}{x^4}$, cu nedeterminare $\frac{0}{0}$

și cum funcția de integrat, $g(t) = t^3 \sqrt{t^2 + 4}$, este primitivabilă, considerând o primitivă $G \in \int g(t) dt$

avem $\int_0^x t^3 \sqrt{t^2 + 4} dt = G(x) - G(0)$ 1p

și atunci

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t^3 \sqrt{t^2 + 4} dt}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x) - G(0)}{x^4} \stackrel{\left(\frac{0}{0} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{G'(x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sqrt{x^2 + 4}}{4x^3} = \frac{1}{2}$ 1p