CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -

CLASA a XII-a
FILIERA tehnologică - PROFIL tehnic – toate specializările profesionale; PROFIL servicii

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

Pe mulțimea $G=(-5,5)$, se consideră legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{25(x+y)}{25+xy}$.

a) Demonstrați că $x\circ x<5$, pentru orice $x\in G$.

b) Admițând că $(G,\circ)$ este un grup, arătați că funcția $f:G\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_5\dfrac{5+x}{5-x}$ este izomorfism de la grupul $(G,\circ)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) $x\circ x<5\Leftrightarrow \dfrac{50x}{25+x^2}<5\Leftrightarrow x^2-10x+25>0\Leftrightarrow$	1p
$\Leftrightarrow (x-5)^2>0$ ceea ce este adevărat deoarece $x\in G$, deci $x\neq 5$	1p
b) Demonstrația relației $f(x\circ y)=f(x)+f(y),\ \forall x,y\in G$	3p
Demonstrarea injectivității funcției f	1p
Demonstrarea surjectivității funcției f	1p

Enunţ subiect 2

a) Arătați că $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2-1}dx>0$.

b) Arătați că $\displaystyle\sum_{k=2}^{2017}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2-1}dx\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{2017}{673}$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $\displaystyle\int_2^3\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|\Big\|_2^3=$	1p
$=\dfrac{1}{2}\left(\ln\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}$	1p
$\dfrac{3}{2}>1\Rightarrow \ln\dfrac{3}{2}>0\Rightarrow\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}>0$.	1p

b) $\int_k^{k+1} \frac{1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\|\Bigg\|_k^{k+1} = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{k}{k+2} - \ln\frac{k-1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)}$	1p
$\sum_{k=2}^{2017}\left(\int_k^{k+1}\frac{1}{x^2-1}dx\right) = \sum_{k=2}^{2017}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{k(k+1)}{(k-1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{2017}{673}$	3p

Enunț subiect 3

Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ f(x) = \begin{cases} x^3 - 5x + 2017, & \text{dacă } x \neq 2 \\ 2015, & \text{dacă } x = 2 \end{cases}$.

a) Calculați $\int_6^a \frac{f(x)-2010}{x^2}dx$, unde a este derivata funcției în punctul $x_0 = 2$.

b) Dacă $G:(-\infty;1]\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției $g:(-\infty;1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ pentru care $G(1)$ este egală cu suma primelor 2016 numere naturale, calculați $G(-1)$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
a) $f'(2) = \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x+2017-2015}{x-2} \Rightarrow$	1p
$\Rightarrow a = 7$	1p
$\int_6^a \frac{f(x)-2010}{x^2}dx = \int_6^7\left(x - \frac{5}{x} + \frac{7}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\Big\|_6^7 - 5\ln x\Big\|_6^7 - \frac{7}{x}\Big\|_6^7$	1p
Rezultat final: $\frac{20}{3} - 5\ln\frac{7}{6}$	1p
b) Calcul $G(1) = \frac{1}{4} - \frac{5}{2} + 2017 + c = 1008\cdot 2015$	1p
Calcul $G(-1) = 2015\cdot 1008 - 2\cdot 2017 = 2027086$	2p

Enunț subiect 4

Pe mulțimea $A = (0;+\infty)\setminus\{1\}$ se definește legea de compoziție $x\circ y = \sqrt{y^{\log_2 x}}$.
Determinați elementul neutru și simetricul numărului 256 în raport cu legea dată.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
Definiția elementului neutru	1p
Elementul neutru este 4	2p
Definiția elementului simetrizabil/ simetricului	1p
Simetricul lui 256 este $\sqrt{2}$	3p