



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 1.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Rezolvați ecuația $\det(I_3 + xA) = 0$, în necunoscuta $x \in \mathbb{R}$.
- b) Demonstrați că $A^2 = A + 2I_3$.
- c) Demonstrați că matricea B , cu $B = 2A + I_3$, este inversabilă și are inversă matricea $C = \frac{2}{5}A - \frac{3}{5}I_3$.
- d) Matricea $B = 2A + I_3$ o transformăm în 2017 pași, în felul următor: la fiecare pas, în mod aleator, elementele de pe diagonala principală se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 1 iar toate celelalte elemente se măresc toate deodată sau se micșorează toate deodată cu 3. Aflați dacă este posibil ca după parcurgerea celor 2017 pași matricea B să se transforme într-o matrice cu determinantul egal cu 2017.

Soluție:

a) $\det(I_3 + xA) = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = (2x+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = (2x+1)(x-1)^2$
 $\Rightarrow \det(I_3 + xA) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -\frac{1}{2}; 1 \right\}$ 2p

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3$ 1p

c) $\det(2A + I_3) = 5 \neq 0 \Rightarrow B$ este inversabilă 1p

$(2A + I_3) \left(\frac{2}{5}A - \frac{3}{5}I_3 \right) = I_3$, deci $B^{-1} = C$ 1p

d) După 2017 pași matricea B ce transformă într-o matrice M de forma $M = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & q_2 \\ q_3 & p_2 & q_4 \\ q_5 & q_6 & p_3 \end{pmatrix}$ cu termenii de pe

diagonala principală pari și ceilalți termeni impari 1p

$\Rightarrow \det M = \text{număr par} \neq 2017$ 1p



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 2.

Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{X \in M_2(\mathbb{R}) / A \cdot X = X \cdot A\} \therefore$

- Demonstrați că $B \in G$.
- Dacă $X \in G$, demonstrați că există $x, y \in \mathbb{R}$ și X este de forma: $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$.
- Matricea $X \in M_2(\mathbb{R})$ verifică egalitatea $X^3 - X = A$. Demonstrați că $X \in G$ și determinați toate matricele X cu această proprietate.

Soluție:

a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 28 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $B \cdot A = \begin{pmatrix} 12 & 28 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow B \in G$ 2p

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A$ 1p

și se obține $\begin{pmatrix} 6a+11c & 6b+11d \\ 6c & 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a & 11a+6b \\ 6c & 11c+6d \end{pmatrix}$ 1p

din care $c=0$, $a=d \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ 1p

c) Dacă $X^3 - X = A$, cum $(X^3 - X) \cdot X = X \cdot (X^3 - X) \Rightarrow A \cdot X = X \cdot A \Rightarrow X \in G$,

deci X este de forma $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $x, y \in \mathbb{R}$ 1p

$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^3-x & 3x^2y-y \\ 0 & x^3-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow x^3-x=6, y(3x^2-1)=11$

$\Rightarrow x=2, y=1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 1p



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 3.

a) Fie a, b, c numere reale strict pozitive și funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1}$.

Determinați a, b, c știind că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 4$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{1}{4}$.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x + 1}$.

Soluție:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a + \sqrt{b} \Rightarrow a + \sqrt{b} = 4$ 1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{bx^2 - cx + 1} - ax) \Rightarrow$$

\Rightarrow limită finită $\Leftrightarrow \sqrt{b} = a \Rightarrow a = 2, b = 4$ 1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + \sqrt{bx^2 + cx + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - cx + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-cx + 1}{\sqrt{4x^2 - cx + 1} + 2x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow c = 1$$
 1p

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x + 1}$ este continuă pe \mathbb{R} , \Rightarrow nu are asimptote verticale 1p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 4, \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 4x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - 2x) = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 4x + \frac{1}{4}$$
 asimptotă la $+\infty$ 2p

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x + 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 1}{\sqrt{4x^2 - x + 1} + 2x} = -\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -\frac{1}{4}$ asimptotă la $-\infty$ 1p



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a XI-a

BAREM

Problema 4.

Funcția $f : [0;12] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \begin{cases} \frac{3t^2 - 10t + a}{t^2 - 2t - 3}, & t \in [0; 3) \\ b - \log_2(t - 2), & t \in [3; 12] \end{cases}$, determină temperatura unui corp, măsurată pe timp de 12 ore.

- a) Știind că la momentul $t=1$ temperatura corpului este de 1^0 iar la momentul $t=2$ este de 2^0 , aflați temperatura corpului la momentul $t=10$.
- b) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ în cazul în care f are limită în $t=3$.
- c) În cazul $a=3$ și $b=2$ arătați că f este continuă pe $[0;12]$ și determinați intervalele pe care $f(t) > 0$.

Soluție:

a) $f(1) = 1, f(3) = 2 \Rightarrow a = 3, b = 2$ 1p
 $f(10) = -1$ 1p

b) $l_s = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{3t^2 - 10t + a}{t^2 - 2t - 3} = -\infty \cdot (a - 3), l_d = b, l_s = l_d \Rightarrow a = 3$ 2p

pentru $a = 3 \Rightarrow l_s = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{3t^2 - 10t + 3}{t^2 - 2t - 3} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{(t-3)(3t-1)}{(t-3)(t+1)} = 2, l_d = b \Rightarrow b = 2$ 1p

c) $f : [0;12] \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = \begin{cases} \frac{3t^2 - 10t + 3}{t^2 - 2t - 3}, & t \in [0; 3) \\ 2 - \log_2(t - 2), & t \in [3; 12] \end{cases}$, este continuă pe $[0; 12] \setminus \{3\}$

iar în $x=3$, având $l_s = l_d = f(3) \Rightarrow f$ continuă pe $[0; 12]$ 1p

$f(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}, t = 6$

t	0	$\frac{1}{3}$	6	12 1p
f(t)	----- 0 ++++++ 0 -----				$\Rightarrow t \in \left(\frac{1}{3}; 6\right)$