CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -

CLASA a XI-a
FILIERA tehnologică - PROFIL tehnic – toate specializările profesionale; PROFIL servicii
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1

Fie matricea $B=\begin{pmatrix}1 & \omega^2 & \omega\\ \omega & 1 & \omega^2\\ \omega^2 & \omega & 1\end{pmatrix}$, unde $\omega\in\mathbb{C}$, cu $\omega^2+\omega+1=0$.

a) Arătați că $\omega^3=1$.

b) Determinați matricea $B^n, n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați $B+B^2+B^3+.......+B^{2017}$.

Detalii rezolvare subiect 1	**Barem asociat**
a) Demonstrația relației	1p
b) $B^n=3^{n-1}B$	2p
Demonstrația prin inducție matematică	1p
c) $B+B^2+...+\mathrm{B}^{2017}=\left(1+3+...3^{2016}\right)B$	2p
$B+B^2+........+B^{2017}=\dfrac{3^{2017}-1}{2}\cdot B$	1p

Enunţ subiect 2

Se consideră matricea $A(x,n)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & x^n & 0\\ 0 & x^n-1 & 1\end{pmatrix}$, cu $x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}$.

a) Determinați $n\in\mathbb{N}$, știind că $\det\left(A^2(5,n)\right)-10\cdot\det\left(A(5,n)\right)+25\cdot\det\left(I_3\right)=0$.

b) Determinați $n\in\mathbb{N}^*$, dacă $\det\left(A(2;1)\right)\cdot\det\left(A(2;2)\right)\cdot...\cdot\det\left(A(2;n)\right)=\det\left(A\left(2,C_{10}^8\right)\right)$.

Detalii rezolvare subiect 2	**Barem asociat**
a) $\det\left(A(x,n)\right)=x^n\Rightarrow\det\left(A(5,n)\right)=5^n$	1p
$\det\left(A^2(5,n)\right)=\left(\det\left(A(5,n)\right)\right)^2=5^{2n}$	1p
Relația din enunț devine $5^{2n}-10\cdot5^n+25=0\Rightarrow\left(5^n-5\right)^2=0\Rightarrow5^n=5\Rightarrow n=1$	1p

b) $\det\left(A(2;1)\right)\cdot\det\left(A(2;2)\right)\cdot\ldots\cdot\det\left(A(2;n)\right)=2\cdot2^2\cdot\ldots\cdot2^n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$	2p
$\det\left(A\left(2;C_{10}^8\right)\right)=\det\left(A(2;45)\right)=2^{45}$	1p
$2^{\frac{n(n+1)}{2}}=2^{45}\Rightarrow n=9$	1p

Enunț subiect 3

Aflați parametrii reali a și b pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^{ax}+3^{bx}+1, x<1\\ 6,\ 1\le x\le 2\\ 2^{ax}+3^{bx}-7, x>2\end{cases}$ are limite în punctele $x_1=1$ și $x_2=2$.

Detalii rezolvare subiect 3	**Barem asociat**
$\lim\limits_{x\nearrow 1} f(x)=\lim\limits_{x\nearrow 1}\left(2^{ax}+3^{bx}+1\right)=2^a+3^b+1$, $\lim\limits_{x\searrow 1} f(x)=6$	1p
$\lim\limits_{x\nearrow 2} f(x)=6$, $\lim\limits_{x\searrow 2} f(x)=\lim\limits_{x\searrow 2}\left(2^{ax}+3^{bx}-7\right)=2^{2a}+3^{2b}-7$	1p
$\begin{cases}2^a+3^b+1=6\\ 2^{2a}+3^{2b}-7=6\end{cases}\overset{2^a=t}{\underset{3^b=u}{\Rightarrow}}\begin{cases}t+u=5\\ t^2+u^2=13\end{cases}$	1p
$\begin{cases}t=5-u\\ (5-u)^2+u^2=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=5-u\\ 2u^2-10u+12=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=2\\ t=3\end{cases}$ sau $\begin{cases}u=3\\ t=2\end{cases}$	2p
$\begin{cases}2^a=2\\ 3^b=3\end{cases}$ sau $\begin{cases}2^a=3\\ 3^b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}a=\log_2 3\\ b=\log_3 2\end{cases}$	2p

Enunț subiect 4

Calculați limitele următoare:

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x}-1)}{(x-1)^2}$;

b) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\ln[1+tg(x+1)]}{\arcsin(2x+2)}$.

Detalii rezolvare subiect 4	**Barem asociat**
a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{2}$	1p
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\dfrac{1}{3}$	1p
Rezultat final: $\dfrac{1}{6}$	1p

b) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\ln[1+tg(x+1)]}{tg(\mathrm{x}+1)}=1$	1p
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\arcsin(2x+2)}{2x+2}=1$	1p
$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{tg(x+1)}{x+1}=1$	1p
Rezultat final: $\dfrac{1}{2}$	1p