MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCŢII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 1.

Pe un cerc cu raza de $\frac{1}{2\pi}$ metri se deplasează doi melci, notați A și B, plecând în același moment, din același loc și în sensuri diferite. Se știe că în fiecare a n-a secundă de la începutul deplasării lor, melcul A parcurge $\frac{1}{2^n}$ metri în timp ce melcul B parcurge doar $\frac{1}{4^n}$ metri.

a) Arătați că distanța parcursă de melcul A în primele n secunde este egală cu $\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ metri.

b) Determinați după câte secunde distanța parcursă de melcul B este egală cu $\frac{3}{8}$ din distanța parcursă de melcul A.

c) Aflați de câte ori se întâlnesc cei doi melci, considerând că după fiecare întâlnire ei își continuă deplasarea după aceleași reguli.

<u>**Soluție**</u>:

a) Notăm $S_n(A)$ distanța parcursă de melcul A în n secunde, respectiv $S_n(B)$ distanța parcursă de melcul B în aceleași n secunde și obținem:

$S_n(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$ 2p

b) $S_n(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)$ 1p

$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)=\frac{3}{8}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$ 1p

$2^n=8$, $n=3$ 1p

c) Cercul traiectoriei are lungimea de 1 metru și se observă $S_n(A)<1$, $S_n(B)<1$ 1p

deci nici unul din melci nu parcurge întreg cercul.

Cum $S_2(A)+S_2(B)>1$, melcii se întâlnesc o singură dată 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 2.

a) Demonstrați că $4 < 4\log_7 10 < 5$.

b) Calculați $[\log_3 256]$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului real x.

c) Comparați numerele $a = \log_7 10$ și $b = \log_3 4$.

<u>Soluție</u>:

a) $4 < 4\log_7 10 \Leftrightarrow \log_7 7 < \log_7 10$ (A) 1p

$4\log_7 10 < 5 \Leftrightarrow \log_7 10^4 < \log_7 7^5 \Leftrightarrow 10.000 < 16.807$ (A) 1p

b) $3^5 < 256 < 3^6 \Rightarrow 5 < \log_3 256 < 6 \Rightarrow [\log_3 256] = 5$ 3p

c) $4a = 4\log_7 10 \in (4;\, 5)$ și $4b = \log_3 256 \in (5;6) \Rightarrow a < b$ 2p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 3.

Considerăm $\varepsilon=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, cu $i^2=-1$.

a) Arătați că $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ și $\varepsilon^3=1$.

b) Demonstrați că pentru orice $x,\ y\in\mathbb{R}$ are loc $x^2+xy+y^2=|x-\varepsilon y|^2$.

c) Dacă $x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ și $a=x^2y+y^2z+z^2x$, respectiv $b=xy^2+yz^2+zx^2$, calculați în funcție de a și b expresia $E=\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)$

<u>**Soluție**</u>:

a) Calcul direct sau folosind $\varepsilon+\overline{\varepsilon}=-1$ și $\varepsilon\cdot\overline{\varepsilon}=1$

$\Rightarrow$ ε și $\overline{\varepsilon}$ verifică ecuația $x^2+x+1=0\ \Rightarrow\ \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$ 1p

apoi $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0\ \Rightarrow\ \varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon=0\ \Rightarrow\ \varepsilon^3+\varepsilon^2+\varepsilon+1=1\ \Rightarrow\ \varepsilon^3=1$ 1p

b) Calcul direct $|x-\varepsilon y|^2=\left|\left(x+\dfrac{y}{2}\right)-\dfrac{y\sqrt{3}}{2}\cdot i\right|^2=\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}=x^2+xy+y^2$

sau $|x-\varepsilon y|^2=(x-\varepsilon y)\cdot\overline{(x-\varepsilon y)}=(x-\varepsilon y)\cdot\left(x-\overline{\varepsilon}y\right)=x^2+xy+y^2$ 2p

c) $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)$ și analogele 1p

$E=(x-y)(y-z)(z-x)\left(x^2+xy+y^2\right)\left(y^2+yz+z^2\right)\left(z^2+zx+x^2\right)=A\cdot B$

$A=(x-y)(y-z)(z-x)=b-a$ 1p

$B=\left(x^2+xy+y^2\right)\left(y^2+yz+z^2\right)\left(z^2+zx+x^2\right)=\left|(x-\varepsilon y)(y-\varepsilon z)(z-\varepsilon x)\right|^2=\left|-\varepsilon(a-\varepsilon b)\right|^2=a^2+ab+b^2\ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ E=(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)=b^3-a^3$ 1p

MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN IAȘI

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAȘINI ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

CLASA a X-a

BAREM

Problema 4.

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2^x, \text{ dacă } x\in\mathbb{Q} \\ 3^x, \text{ dacă } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.

a) Arătați că $\log_3 2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Arătați că $f(\log_3 2)\in\mathbb{Q}$

c) Demonstrați că ecuația $f(x)=3$, $x\in\mathbb{R}$, nu are soluție.

d) Demonstrați că funcția f nu este nici injectivă și nici surjectivă.

<u>**Soluție**</u>:

a) Dacă $\log_3 2=n\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ 2=3^n$ iar dacă $\log_3 2=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ 2^q=3^p$ (număr par = număr impar!) 1p

b) $f(\log_3 2)=3^{\log_3 2}=2$ 2p

c) Dacă $x\in\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ f(x)=3\ \Leftrightarrow\ 2^x=3\ \Leftrightarrow\ x=\dfrac{1}{\log_3 2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ contradicție 1p

Dacă $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \Rightarrow\ f(x)=3\ \Leftrightarrow\ 3^x=3\ \Leftrightarrow\ x=1\in\mathbb{Q}$ contradicție 1p

d) $f(1)=2=f(\log_3 2)\ \Rightarrow$ funcție neinjectivă 1p

$f(x)\neq 3$, $(\forall)\ x\in\mathbb{R}\ \Rightarrow$ funcție nesurjectivă 1p