CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

CLASA a IX-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

a) Calculați aproximarea prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^{-4} a numărului $a=\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$.

b) Determinați $a\in(0,1)$ pentru care $0{,}3$ este o aproximare mai bună decât $\frac{1}{3}$. (Prin definiție Numărul real β este o aproximare *mai bună* a numărului real a decât α dacă și numai dacă $|a-\beta|\le|a-\alpha|$.)

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $a=\frac{10}{21}=0{,}47619...\in[0{,}4761;0{,}4762)$; aproximarea prin lipsă cu o eroare mai mică decât 10^{-4} este $0{,}4761$	**2p**
b) $|a-0{,}3|\le\left|a-\frac{1}{3}\right|$ pentru $a\in(0,1)$.	**1p**
$a\in(0;0{,}3)$: $0{,}3-a\le\frac{1}{3}-a\Leftrightarrow\frac{3}{10}\le\frac{3}{9}$ (adevărat)	**1p**
$a\in\left[0{,}3;\frac{1}{3}\right)$: $a-0{,}3\le\frac{1}{3}-a\Leftrightarrow a\le\frac{19}{60}$	**1p**
$a\in\left[\frac{1}{3},1\right)$: $a-0{,}3\le a-\frac{1}{3}\Leftrightarrow\frac{3}{10}\ge\frac{3}{9}$ (fals)	**1p**
În final $a\in\left(0,\frac{19}{60}\right)$.	**1p**

Enunț subiect 2

a) Determinați x natural pentru care $1+2+3+...+2016\le x<1+2+3+...+2017$.
b) Se consideră progresiile geometrice:

1, 2, 4, 8, 16, …
1, 3, 9, 27, 81, …
1, 6, 36, 216, …

în care S_n, $S_n^{'}$, respectiv $S_n^{''}$ reprezintă sumele primilor n termeni. Arătați că $5S_n^{''}+1=(S_n+1)(2S_n^{'}+1)$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $1+2+3+...+2016=2016\cdot 2017:2=2033136$	**1p**
$x\in\{2033136,2033137,...,2035152\}$	**2p**
b) $5S_n''+1=6^n$, $S_n+1=2^n$.	**2p**
$2S_n'+1=3^n$. Finalizare.	**2p**

Enunț subiect 3

Se consideră predicatul $p(n,a):(n^3+an)\vdots 6$, $a\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$.

a) Arătaţi că propoziția $(\forall n)\,p(n,11)$ este adevărată.

b) Determinaţi mulțimea $A=\{a\in\mathbb{Z}\,|\,(\forall n)\,p(n,a) \quad \textit{este} \quad \textit{adevărată}\}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Inducție după *n*: $p(0,11)$ este adevărată	**1p**
și pentru orice k natural, dacă $p(k,11)$ este adevărată, atunci $(k+1)^3+11(k+1)$ este multiplu de 6, întrucât $3k(k+1)$ este divizibil cu 2 și cu 3; rezultă $p(k+1,11)$ adevărată. *Alternativ*: $n^3+11n=n^3-n+12n=(n-1)n(n+1)+12n$ (**1p**) este divizibil cu 6 întrucât produsul a trei numere consecutive este divizibil cu 2 și cu 3, iar 12*n* este multiplu de 6 (**2p**).	**2p**
b) $2\,\|\,n(n^2+a)\Rightarrow a$ impar	**1p**
$n=3c+r$, $r\in\{0,1,2\}$ $n(n^2+a)=3k+r(r^2+a)\vdots 3\Leftrightarrow r(r^2+a)\vdots 3\Leftrightarrow a=3p+2$, $p\in\mathbb{Z}$	**2p**
$A=\{6k+5\,\|\,k\in\mathbb{Z}\}$	**1p**

Enunț subiect 4

Se consideră paralelogramul $ABCD$ ale cărui diagonale se intersectează în O și punctul E astfel încât $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CB}$. Descompuneți după $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$ și $\vec{b}=\overrightarrow{EO}$ următorii vectori : $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AD}$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\overrightarrow{CE}=-3\vec{a}$	**1p**
$\overrightarrow{CO}=-3\vec{a}+\vec{b}$	**1p**
$\overrightarrow{CA}=-6\vec{a}+2\vec{b}$	**1p**
$\overrightarrow{AB}=5\vec{a}-2\vec{b}$	**1p**
$\overrightarrow{OD}=-2\vec{a}+\vec{b}$	**1p**
$\overrightarrow{AD}=\vec{a}$	**2p**