



**CONCURSUL NAȚIONAL
DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"**



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN IAȘI

**ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017**

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAȘINI
ȘI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera Teoretică : profilul Real - Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a XII -a

Problema 1.

Două lentile având distanțele focale f_1 , respectiv f_2 sunt situate la distanța $d > 0$ una față de cealaltă; în această situație distanța focală f a sistemului este dată de legea de compoziție $f = f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$

Considerând legea de compoziție definită pe $G = (0; +\infty)$, se cere:

- a) Să se demonstreze că legea este asociativă.
- b) Să se studieze dacă legea admite element neutru.
- c) Să se calculeze $\frac{d}{2017} \circ \frac{d}{2016} \circ \dots \circ d \circ (2d) \circ (3d) \circ (4d) \circ \dots \circ (2017d)$.

Soluție:

- a) Verifică asociativitatea.....2p
- b) Demonstrează că nu există element neutru.....2p
- c) Demonstrează că d este elementul absorbant al legii de compoziție ($d \circ f_1 = d, f_1 \circ d = d$).2p
- Finalizare.....1p

Problema 2.

Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ și $g(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$

- a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.
- b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)$, unde G este primitiva lui g care se anulează în $x=1$.
- c) Să se demonstreze : $\int_1^{\operatorname{tg}x} f(t)dt + \int_1^{\operatorname{ctg}x} g(t)dt = 0, \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Soluție:

- a) $\int_0^1 f(x)dx = \frac{\ln 2}{2}$ 2p
- b) Descompune $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$ 1p
- $G(x) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{\ln 2}{2}$ 1p

Limita este $\frac{\ln 2}{2}$ 1p

c) Demonstrează relația2p

Problema 3.

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2}$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x)dx$.

b) Să se demonstreze că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^{x^3} f(t)dt$ este strict crescătoare pe $[0,1]$

c) Să se demonstreze $\int_0^1 f(x)dx \in (1,2)$.

Soluție:

a) $\int_0^1 xf(x)dx = \frac{e-1}{2}$ 2p

b) $F'(x) = 3x^2 e^{x^6}$ 2p

$F'(x) > 0, \forall x \in (0,1)$, deci F este strict crescătoare pe $[0,1]$ 1p

c) $x^2 \leq x, \forall x \in [0,1] \Rightarrow e^{x^2} \leq e^x, \forall x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e-1 < 2$ 1p

$e^{x^2} \geq 1+x^2 \Rightarrow \int_0^1 e^{x^2} dx \geq \int_0^1 (1+x^2) dx = \frac{4}{3} > 1$ 1p

Problema 4.

$G = \left\{ A(k) = \begin{pmatrix} 2^k & 2^k \\ 2^k & 2^k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ și pentru fiecare $t \in \mathbb{Z}$ notăm $H_t = \{A(kt-1) / k \in \mathbb{Z}\}$. Se admite faptul că

(G, \cdot) este un grup, unde “ \cdot ” este înmulțirea matricelor.

a) Să se demonstreze că pentru orice $n, p \in \mathbb{Z}$, $A(n) \cdot A(p) = A(n+p+1)$.

b) Să se demonstreze că, pentru $\forall t \in \mathbb{Z}$, H_t este un subgrup al grupului (G, \cdot)

c) Să se demonstreze că grupurile (G, \cdot) și $(\mathbb{Z}, +)$ sunt izomorfe.

Soluție:

a) Demonstrează relația.....2p

b) Demonstrează că elementul neutru este $A(-1)$ 1p

Demonstrează că (H_t, \cdot) este subgrup.....2p

c) Demonstrează ca funcția $f: \mathbb{Z} \rightarrow G, f(k) = A(k-1)$ este izomorfism.....2p