MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Științe ale naturii

CLASA a XII-a
SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Pe mulțimea $(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = \left(x^{-1}+y^{-1}\right)^{-1}$.

a) Calculați $1 \circ \sqrt{2}$.

b) Arătați că legea de compoziție din enunț este asociativă.

c) Determinați n natural pentru care $\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^{-1} \circ \ldots \circ \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^{-1} = \frac{132}{131}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $2-\sqrt{2}$	**1p**
b) $x\circ(y\circ z)=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$ și $(x\circ y)\circ z=\left(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}\right)^{-1}$	**1p**
Finalizare	**1p**
c) Se arată că $x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \ldots \circ x_n = \left(x_1^{-1}+x_2^{-1}+x_3^{-1}+\ldots+x_n^{-1}\right)^{-1}$, oricare ar fi $x_i \in (0,+\infty)$, $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$	**2p**
$\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)^{-1} \circ \left(\frac{1}{3\cdot 4}\right)^{-1} \circ \ldots \circ \left(\frac{1}{n(n+1)}\right)^{-1} = \frac{n+1}{n}$	**1p**
$n=131$	**1p**

Enunț subiect 2

Fie funcția $f_a:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=\frac{1}{1+x^a}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $\int_1^4 f_{\frac{1}{2}}(x)\,dx$.

b) Determinați $b\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_b^{b+1} \frac{f_2(x)}{f_{-2}(x)}dx=\frac{1}{2}$.

c) Arătați că $\int_c^{c+1} f_a(x)\,dx + \int_c^{c+1} f_{-a}(x)\,dx = 1$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, $c\in(0,+\infty)$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\int_1^4 f_{\frac{1}{2}}(x)dx \overset{t=1+\sqrt{x}}{=} 2\int_2^3 \frac{t-1}{t}dt =$	**1p**
$= 2(t - lnt)\Big\|_2^3 = 2 - 2ln\frac{3}{2}$	**1p**
b) $\int_b^{b+1} \frac{f_2(x)}{f_{-2}(x)}dx = \frac{1}{b(b+1)}$	**2p**
$b = 1$	**1p**
c) $\int_c^{c+1} f_a(x)dx + \int_c^{c+1} f_{-a}(x)dx = \int_c^{c+1} (f_a(x) + f_{-a}(x))dx =$ $= \int_c^{c+1} dx = 1$	**2p**

Enunț subiect 3

Se consideră numerele reale şi nenule a, b şi funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$, $g(x) = af'(x+b) + bf'(x-a)$.

a) Determinați toate perechile (a,b) pentru care $2f(a) = b$ şi există o primitivă h a funcției g care verifică : $h(0) = 0$ și $h(a) = \frac{a(a+b)}{\sqrt{2+(a+b)^2}}$.

b) Arătaţi că toate primitivele funcției f sunt nemonotone.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $h \in \int g(x)dx$, deci există c real astfel încât $h(x) = af(x+b) + bf(x-a) + c$.	**1p**
$\begin{cases} \frac{2a}{\sqrt{a^2+2}} = b \\ af(b) + bf(-a) + c = ab \\ af(a+b) + bf(0) + c = \frac{a(a+b)}{\sqrt{2+(a+b)^2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b\sqrt{a^2+2} \\ \frac{ab}{\sqrt{b^2+2}} - \frac{ab}{\sqrt{a^2+2}} + c = 0 \Leftrightarrow \\ c = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a = b\sqrt{a^2+2} \\ \frac{1}{\sqrt{b^2+2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+2}} = 0 \Leftrightarrow \\ c = 0 \end{cases} \begin{cases} \sqrt{a^2+2} = 2 \\ \|a\| = \|b\| \\ c = 0 \end{cases}$	**2p**
$(a,b) \in \{(\sqrt{2},\sqrt{2}),(\sqrt{2},-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},\sqrt{2}),(-\sqrt{2},-\sqrt{2})\}$	**1p**
b) $F \in \int f(x)dx$, deci există c real astfel încât $F(x) = \sqrt{x^2+2} + c$.	**2p**
$-1 < 0 < 1$ și $F(-1) > F(0) < F(1)$, deci F nu este monotonă	**1p**

Enunț subiect 4

Se consideră o mulțime nevidă A şi B mulțimea funcțiilor definite pe A cu valori în A.

Pentru două funcții f, $g \in B$, notăm : $C = \left\{ \begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix} \middle| a,b \in A \right\}$.

a) Dacă $A = \{1,2,3\}$, arătați că nu există submulțimi ale lui C pe care înmulțirea matricelor să fie lege de compoziție.

b) Dacă $A = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ şi în ipoteza că înmulțirea matricelor din $D \subseteq C$ este lege de compoziție pe D, arătați că imaginea nici uneia dintre funcțiile f și g nu conține numere prime.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Dacă ar exista $D \subseteq C$ închisă la înmulțire, atunci $\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(c) & f(d) \\ g(c) & g(d) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} f^2(a) + f(b)g(a) = f(c) \\ f(b)\left(f(a)+g(b)\right) = f(d) \\ g(a)\left(f(a)+g(b)\right) = g(c) \\ f(b)g(a) + g^2(b) = g(d) \end{cases}$	**1p**
Cum $f^2(a) \notin \{2,3\}$ (pentru că $f^2(a) + f(b)g(a) \in \{1,2,3\}$) rezultă că $f(a) = 1$ Analog $g(b) = 1$. Atunci relația a doua devine $2f(b) = f(d)$ de unde deducem $f(b) = 1$ şi analog $g(a) = 1$.	**3p**
Dar în acest fel obținem în D matricea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, al cărei pătrat este $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ care nu se poate afla în D. Deci nu există submulțimi ale lui C pe care înmulțirea matricelor să fie lege de compoziție.	**1p**
b) Dacă imaginea lui g ar conține numere prime, de exemplu $g(c)$, atunci din $g(a)\left(f(a)+g(b)\right) = g(c)$ ar rezulta că $g(a) = 1$, care nu se află în codomeniul $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.	**2p**