MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

Filiera Teoretică : profilul Real -Ştiințe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

Clasa a XI -a

Problema 1.

Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$

a) Calculați $\det\left(A^2\right)$.

b) Demonstrați că $A^n=\begin{pmatrix} \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} \\ \frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{2} & \frac{(a+b)^n+(a-b)^n}{2} \end{pmatrix}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

c) Rezolvați în $\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$ ecuatia $X^{2017}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. (Eventual folosiți faptul că $X\cdot X^{2017}=X^{2017}\cdot X$)

Soluție:

a) $\det\left(A^2\right)=(\det A)^2=\left(a^2-b^2\right)^2$ …………………………………………………………………………**2** puncte

b) Inducție matematică ……………………………………………………………………………**2** puncte

c) Fie $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{(2,2)}(\mathbb{R})$

Din $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot X \Rightarrow a=d$ si $b=c \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ ………………………………………**1** punct

Ecuația $X^{2017}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ devine $\begin{pmatrix} \frac{(a+b)^{2017}+(a-b)^{2017}}{2} & \frac{(a+b)^{2017}-(a-b)^{2017}}{2} \\ \frac{(a+b)^{2017}-(a-b)^{2017}}{2} & \frac{(a+b)^{2017}+(a-b)^{2017}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\begin{cases} (a+b)^{2017}=3 \\ (a-b)^{2017}=1 \end{cases}$ ……………………………………………………………………………………**1** punct

Finalizare: $a=\frac{1+\sqrt[2017]{3}}{2}$,

$b=\frac{\sqrt[2017]{3}-1}{2}$ ……………………………………………………………………………………**1** punct

Problema 2.

Considerăm mulțimea $\mathcal{M}$ formată din toate matricele cu trei linii şi trei coloane şi care au elemente din mulțimea $\{-1,1\}$.

a) Aflați cardinalul mulțimii $\mathcal{M}$.

b) Dacă $A\in\mathcal{M}$, demonstrați că $4/\det A$.

c) Dacă $A \in \mathcal{M}$, argumentați că $\det A \in \{-4, 0, 4\}$.

d) Demonstrați că $\forall A \in \mathcal{M}$, matricea A^{2017} are toate elementele nenule.

Soluție:

a) Fie $\mathcal{M} = \{1, 2, ..., m\}$ și $N = \{1, 2, ..., n\}$ mulțimile primelor m respectiv n numere naturale. O matrice cu m linii și n coloane, având elemente reale, este o aplicație $A: M \times N \to \mathbb{R}$. Dacă notăm $A(i, j) = a_{ij}$; $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, dăm matricea A printr-un tablou dreptunghiular cu m linii și n coloane. Există k^l aplicații care pot fi definite pe o mulțime cu l elemente cu valori într-o mulțime cu k elemente.

$card\mathcal{M} = 2^9 = 512$ ……………………………………………………………………..**2** puncte

b) Fie $A \in \mathcal{M}$. Adunăm a treia coloană la primele două coloane ($c_1 + c_3$ respectiv $c_2 + c_3$) Astfel pe primele două coloane ale matricei astfel obținute vom avea elementele $0, 2$ sau -2.

Deducem că $4 / \det A$……………………………………………………..………...…...**2** puncte

c) $-6 \le \det A \le 6$ și din punctul b) $\det A$ este multiplu de 4, obținem că $\det A \in \{-4, 0, 4\}$ ……...…**2** puncte

d) În A^n; $\forall n \ge 1$ avem doar elemente întregi impare, de unde rezultă cerința problemei……………..**1** punct

Problema 3

Pe o insulă trăiesc 12 cameleoni. La un moment dat trei dintre ei au culoarea roșie, patru au culoarea galbenă, iar ceilalți cinci au culoarea verde. Se știe că, dacă se întâlnesc doi cameleoni de culori diferite atunci ambii își schimbă culoarea în cea de-a treia culoare, în rest ei nu își schimbă culoarea.

Demonstrați că:

a) Este posibil ca la un moment dat, nici un cameleon să nu aibă culoarea verde.

b) Nu este posibil ca, la un moment dat, toți cameleonii să aibă culoarea verde.

Soluție:

a) Notăm cu R numărul cameleonilor roșii, cu V numărul cameleonilor verzi și cu G numărul cameleonilor galbeni. …………………………………………………………………………………………..….**1** punct

În tabelul de mai jos, exemplificăm în cinci pași posibilitatea de la punctul a)

R	3	5	7	9	11	10
G	4	3	2	1	0	2
V	5	4	3	2	1	0

…………………………………………………………………………………….................. **2** puncte

b) Analizând posibilitățile apărute în urma întâlnirii a doi cameleoni, căutăm un invariant.

Inițial $R = 3,\ G = 4,\ V = 5$

Dacă se întâlnește unul roșu cu unul verde, vom avea: $R = 2,\ G = 6,\ V = 4$ ……………………………….**1** punct

Dacă se întâlnește unul galben cu unul verde vom avea: $R = 5,\ G = 3,\ V = 4$ …………………………...**1** punct

Dacă se întâlnește unul roșu cu unul galben vom avea: $R = 2,\ G = 3,\ V = 7$ ………………..........……..**1** punct

Comparând configurația inițială $(R, G, V) = (3, 4, 5)$ cu oricare dintre configurațiile rezultate în urma întâlnirii a doi cameleoni, observăm că doar un număr din configurație este multiplu de trei. Dacă ar fi posibil ca toți să fie verzi, am obține configurația $(0, 0, 12)$ în care toate numerele sunt divizibile cu 3. (FALS)

Așadar nu este posibil în nici un moment ca toți cameleonii să fie verzi ……………...……………**1** punct

Problema 4.

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție astfel încât $\left|f(x) - x^2\right| \le 2|x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$

a) Arătați că $f(0) = 0$.

b) Dați un exemplu de funcție care să îndeplinească inegalitatea din enunț.

c) Justificași continuitatea funcției f în origine.

Soluție:

a) În inegalitatea din enunț înlocuim pe x cu 0 și avem:

$\left|f(0) - 0^2\right| \le 2|0| \Rightarrow \left|f(0)\right| \le 0 \Rightarrow f(0) = 0$ ……………………………………………..……**3** puncte

b) Exemplu $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ …………………………………………………………….…**2** puncte

c) Din inegalitatea din enunț obținem:

$-2|x| \le f(x) - x^2 \le 2|x|,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - 2|x| \le f(x) \le x^2 + 2|x|,\ \forall x \in \mathbb{R}$ ....**1** punct

Din criteriul cleștelui avem $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Cum $f(0) = 0$ rezultă continuitatea funcției în origine.............**1** punct