CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Științe ale naturii

CLASA a XI-a
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Fie A, B, C, D patru puncte distincte ale parabolei de ecuație $y=x^2$, de abscise x_A, x_B, x_C, respectiv x_D.

a) Dacă x_A, x_B, x_C, x_D sunt în progresie geometrică și aria triunghiului ABC este egală cu o optime din aria triunghiului BCD, determinați rația progresiei din care cele patru abscise fac parte.

b) Dacă x_A, x_B, x_C, x_D sunt în progresie aritmetică, arătați că aria triunghiului ABC este egală cu aria triunghiului BCD.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Notăm $\Delta_1=\begin{vmatrix} x_A & x_A^2 & 1 \\ x_B & x_B^2 & 1 \\ x_C & x_C^2 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2=\begin{vmatrix} x_B & x_B^2 & 1 \\ x_C & x_C^2 & 1 \\ x_D & x_D^2 & 1 \end{vmatrix}$. **a)** $\Delta_2=q^3\Delta_1$, unde q este rația progresiei	**1p**
$A_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\lvert\Delta_2\rvert=\frac{1}{2}\lvert q^3\Delta_1\rvert=\lvert q^3\rvert A_{\Delta ABC}$	**1p**
$q=\pm 2$	**1p**
b) $\Delta_1=(x_B-x_A)(x_C-x_A)(x_C-x_B)=2r^3$, unde r este rația progresiei	**2p**
$A_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta_1\rvert=\lvert r^3\rvert$; analog $\Delta_2=2r^3$ și $A_{\Delta BCD}=\frac{1}{2}\lvert\Delta_2\rvert=\lvert r^3\rvert$. Finalizare	**2p**

Enunț subiect 2

Fie funcția $f:(-\infty,3)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^3}{x^2+1}, x\in(-\infty,1] \\ (x-1)\left[\dfrac{1}{x-1}\right], x\in(1,3) \end{cases}$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

a) Arătați că funcția f are limită în $x_0=1$.

b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Pentru orice $x\in(1,3)$ avem $\frac{1}{x-1}-1<\left[\frac{1}{x-1}\right]\le\frac{1}{x-1}$, de unde $2-x<f(x)\le 1$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=1$	**2p**
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=1$; finalizare.	**1p**
b) $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, $n=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=0$, $y=mx+n\Leftrightarrow y=2x$ este ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
$\left[\frac{1}{x-1}\right]=0$, oricare ar fi $x\in(2,3)$; $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$; finalizare.	**2p**

Enunț subiect 3

Fie matricea $A=\left(a_{ij}\right)_{1\le i,j\le 2}\in M_2(\mathbb{R})$, dată prin $a_{ij}=max(i+j,3i-j,4i-3j)$.

a) Determinaţi numerele reale x, y pentru care $A^2=xA+yI_2$.

b) Calculaţi determinantul matricei $\left(A^2-7A-7I_2\right)^5-\left(A^2-6A-6I_2\right)^5$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $A=\begin{pmatrix}2&3\\5&4\end{pmatrix}$, $A^2=\begin{pmatrix}19&18\\30&31\end{pmatrix}$, $A^2=xA+yI_2\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y=19\\3x=18\\5x=30\\4x+y-31\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=6\\y=7\end{cases}$	**2p**
b) Conform a) $A^2=6A+7I_2$, deci $A^2-6A-6I_2=I_2$ și $A^2-7A-7I_2=(-A)^5=-A\left(A^2\right)^2=-A\left(6A+7I_2\right)^2=-A\left(300A+301I_2\right)=$ $=-2101A-2100I_2$.	**3p**
$\left(A^2-7A-7I_2\right)^5-\left(A^2-6A-6I_2\right)^5=-2101\left(A+I_2\right)=-2101\begin{pmatrix}3&3\\5&5\end{pmatrix}$ al cărei determinant este nul.	**2p**

Enunț subiect 4

Se consideră funcțiile $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1+x}$, $g:A\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x+f(x)}$, $h:B\to\mathbb{R}$, $h(x)=\sqrt{x+g(x)}$.

a) Stabiliți mulțimea valorilor lui x pentru care intervalul $\left[g(x),f(x)\right]$ este o mulțime nevidă.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)-g(x)}{g(x)-f(x)}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Intervalul este mulțime nevidă dacă $\begin{cases} x \in [-1,+\infty) \\ x+f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq f(x) \end{cases}$.	**2p**
$x+f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)$ sau ($x\in[-1,0)$ și $x+1\geq x^2$) $\Leftrightarrow x\in\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ $g(x)\leq f(x)\Leftrightarrow x\in[-1,+\infty)$ și $\sqrt{x+1}\leq 1\Leftrightarrow x\in[-1,0)$ În final $x\in\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right]$	**2p**
b) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+1}}=+\infty$	**1p**
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{h(x)-g(x)}{g(x)-f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+g(x)}-g(x)}{g(x)-f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)-f(x)}{(g(x)-f(x))\left(\sqrt{x+g(x)}+g(x)\right)}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+g(x)}+g(x)}=0$.	**2p**