MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEȚEAN IAŞI

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ "ADOLF HAIMOVICI"

ETAPA JUDEȚEANĂ
18 martie 2017

Filiera Teoretică : profilul Real -Științe ale Naturii

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a X-a

Problema 1.

Se dau numerele reale $x, y, z \in (0, +\infty)$. Demonstrați că au loc inegalitățile:

a) $\sqrt[3]{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \leq x+y+z.$

b) $\sqrt[3]{(2x+y)(x+2y)(2y+z)(y+2z)(2z+x)(z+2x)} \leq (x+y+z)^2.$

(G. M. nr 11/2016)

Soluţie:

a) Folosim inegalitatea mediilor: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}, \forall a,b,c \in (0,+\infty)$ **1p**

Cu $a = 2x+y,\ b = 2y+z$ și $c = 2z+x$ obținem inegalitatea de la **a)**...**2p**

b) Scriem membrul stâng al inegalității de demonstrat ca produsul a doi radicali de ordin 3

$\sqrt[3]{(2x+y)(2y+z)(2z+x)} \cdot \sqrt[3]{(x+2y)(y+2z)(z+2x)}$ **1p**

Din inegalitatea mediilor avem:

$[1]$ $\sqrt[3]{(x+2y)(y+2z)(z+2x)} \leq x+y+z$ **1p**

Înmulțind membru cu membru inegalitatea de la **a)** cu inegalitatea $[1]$ obținem inegalitatea de demonstrat (ambii radicali sunt pozitivi) **2p**

Problema 2.

Fie $a,b,c \in \mathbb{C}^*$, cu $|a| = |b| = |c|$. Demostrați că ecuația $az^2 + bz + c = 0$ are cel puțin o rădăcină de modul 1 dacă și numai dacă $b^2 = ac$.

Soluţie:

Necesitate: Notăm rădăcinile ecuației cu α, β; $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha| = 1$ și scriem relațiile lui Viète **1p**

$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow |\alpha \cdot \beta| = \left|\frac{c}{a}\right| = \frac{|c|}{|a|} = 1,$ iar $|\alpha| = 1$, obținem $|\beta| = 1$, deci $\overline{\alpha} = \frac{1}{\alpha},\ \overline{\beta} = \frac{1}{\beta}$ **1p**

Avem $|\alpha+\beta|^2 = \left|-\frac{b}{a}\right|^2 = 1,$ deci $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) = 1,$ ce conduce la $(\alpha+\beta)^2 = \alpha\beta,$ aşadar

$\left(-\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow b^2 = ac.$ **2p**

<u>Suficiență:</u> Din $b^2 = ac$, cum $a \in \mathbb{C}^*$, se obține $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c}{a}$, așadar $(\alpha+\beta)^2 = \alpha\beta$. **1p**

$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 0,$ iar $\alpha \neq 0 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha}$ este rădăcină complexă nereală de ordin 3 a unității, deci

$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 1 \Rightarrow |\alpha| = |\beta|$ **1p**

Cum $1 = \frac{|c|}{|a|} = \left|\frac{c}{a}\right| = |\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$, obținem $|\alpha| = |\beta| = 1.$ **1p**

Problema 3.

Rezolvați ecuația $\left[\frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right] = \lg x.$

Soluţie:

a) Condiția de existență a logaritmului: $x > 0$ **1p**

notăm $\left[\frac{x}{2}\right] = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \leq \frac{x}{2} < k+1$ **1p**

$k - \frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} < k + \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} - k < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right] < \frac{1}{2}$ **2p**

Obținem că $\left[\frac{x-1}{2} - \left[\frac{x}{2}\right]\right] \in \{-1, 0\} \Rightarrow \lg x \in \{-1, 0\}$ **2p**

Dacă $\lg x = -1,\ x = \frac{1}{10}$, iar dacă $\lg x = 0,\ x = 1$. **1p**

Problema 4.

Avem la dispoziție un număr $n \geq 2000$ de saci goi. Alegem 10 dintre aceștia.
În unii dintre cei 10 saci aleși s-au pus câte 9 saci goi, apoi în unii dintre toți sacii goi s-au pus câte 9 saci goi, etc. După câteva operații de acest fel numărul sacilor care nu sunt goi este 223. Care este numărul total de saci pe care îi avem la dispoziție?

Soluţie:

Fie x_1 numărul sacilor în care s-au pus câte nouă saci goi în prima operație, x_2 numărul sacilor în care s-au pus câte 9 saci goi în a doua operație, etc. **2p**

Astfel la prima operație s-au adăugat $9x_1$ saci goi, la a doua $9x_2$ saci goi, etc. **1p**

În final, după n operații de acest fel numărul sacilor care nu sunt goi este:

$x_1 + x_2 + ... + x_n = 223$ **2p**

Numărul total de saci este: : $10 + 9x_1 + 9x_2 + ... + 9x_n = 10 + 9\cdot 223 = 2017$ **2p**