MINISTERUL EDUCAȚIEI NAȚIONALE

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI

CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „A. HAIMOVICI”
– ETAPA PE SECTOR, 19.02.2017 -
Filiera teoretică - Profil real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

CLASA a X-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1

Fie mulțimea $A=\left\{\sqrt{4n^2+4n}\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*\right\}$.

a) Stabiliți dacă numerele $\sqrt{440}$, $\sqrt{2602}$ sunt elemente ale mulțimii A.

b) Arătați că orice element din mulțimea A are prima cifră zecimală egală cu 8 sau cu 9.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) $\sqrt{440}=\sqrt{4\cdot 10^2+4\cdot 10}\in A$	**1p**
$2602 \not\vdots\, 4$, deci $2602\neq 4n^2+4n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. $\sqrt{2602}\notin A$	**1p**
b) Pentru $n\in\{1,2\}$, obținem numere care au prima cifră zecimală 8	**1p**
Pentru $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$, avem $2n+\frac{9}{10}<\sqrt{4n^2+4n}<2n+1$	**3p**
Finalizare	**1p**

Enunț subiect 2

Fie ecuația $x^2+2ax+b=0$, unde a, $b\in\mathbb{R}$.

a) Determinați a, b pentru care una dintre soluțiile ecuației este $\frac{3-i}{1+i}$.

b) Dacă $b=2a^2-2a+1$, determinați în funcție de a soluțiile ecuației.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Ecuația are coeficienți reali și una dintre soluții $1-2i$, deci a doua soluție este $1+2i$	**2p**
$a=-1$, $b=5$	**2p**
b) $\Delta=-4(a-1)^2$	**1p**
Dacă $a=1$, $x_1=x_2=-1$	**1p**
Dacă $a\neq 1$, $x_{1,2}=-a\pm(a-1)i$.	**1p**

Enunț subiect 3

a) Demonstrați că $ax+by+cz \geq ay+bz+cx$ și $ax+by+cz \geq az+bx+cy$, oricare ar fi numerele reale a, b, c, x, y, z astfel încât $a \leq b \leq c$ și $x \leq y \leq z$.

b) Demonstrați că : $\left(2016^a \cdot 2017^b \cdot 2018^c\right)^2 > 2016^{b+c} \cdot 2017^{a+c} \cdot 2018^{a+b}$, unde $a = 2016^{2016^{2016}}$, $b = 2017^{2017^{2017}}$, $c = 2018^{2018^{2018}}$.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Oricare ar fi numerele reale a, b, c, x, y, z astfel încât $a \leq b \leq c$ și $x \leq y \leq z$ avem: $ax+by+cz-ay-bz-cx = a(x-y)-c(x-y)-y(c-b)+z(c-b) =$ $(a-c)(x-y)+(c-b)(z-y) \geq 0$	**2p**
$ax+by+cz-az-bx-cy = a(x-z)-b(x-z)+b(y-z)-c(y-z) =$ $(a-b)(x-z)+(b-c)(y-z) \geq 0$	**2p**
b) Deoarece $2016 < 2017 < 2018$ rezultă $lg\,2016 < lg\,2017 < lg\,2018$ și $a < b < c$. Conform a) obținem: $a\,lg\,2016 + b\,lg\,2017 + c\,lg\,2018 > b\,lg\,2016 + c\,lg\,2017 + a\,lg\,2018$ $a\,lg\,2016 + b\,lg\,2017 + c\,lg\,2018 > c\,lg\,2016 + a\,lg\,2017 + b\,lg\,2018$ Adunăm cele două inegalități	**2p**
Obținem $2\left(lg\,2016^a + lg\,2017^b + lg\,2018^c\right) > lg\left(2016^{b+c} \cdot 2017^{a+c} \cdot 2018^{a+b}\right)$ $lg\left(2016^a \cdot 2017^b \cdot 2018^c\right)^2 > lg\left(2016^{b+c} \cdot 2017^{a+c} \cdot 2018^{a+b}\right)$ de unde rezultă inegalitatea din enunț.	**1p**

Enunț subiect 4

Se consideră punctele M și N de afixe w, respectiv $z = a^2 - b^2 - 2abi$, $w \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Proiecțiile punctelor M și N pe axa Oy sunt punctele $M'(0,y)$, respectiv $N'(0,-2ay)$, iar proiecțiile acestora pe Ox sunt punctele $M''(a,0)$, respectiv $N''\left(\frac{a^2}{2},0\right)$. Stabiliți dacă raportul lungimilor segmentelor OM și ON este număr rațional.

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$Im(w) = y$, $Im(z) = -2ab = -2ay \Rightarrow y = b$	**1p**
$Re(w) = a$, $Re(z) = a^2 - b^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = 2b^2$.	**1p**
$OM = \lvert w \rvert = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3b^2} = \lvert b \rvert \sqrt{3}$	**1p**
$ON = \lvert z \rvert = \sqrt{\left(a^2-b^2\right)^2 + (-2ab)^2} = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2} = a^2 + b^2 = 3b^2$	**1p**
$\frac{OM}{ON} = \frac{1}{\lvert b \rvert \sqrt{3}}$; $\frac{1}{\lvert b \rvert \sqrt{3}}$ este irațional, oricare ar fi $b \in \mathbb{Z}^*$ $\frac{OM}{ON}$ este irațional.	**3p**